Modelli Matematici per le Scelte di Portafoglio

Anno Accademico 2020-2021

Prof. Arsen Palestini

MEMOTEF - Sapienza Università di Roma

per contatti: Arsen.Palestini@uniroma1.it

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questa dispensa è pensata per il corso di Modelli Matematici per le Scelte di Portafoglio nel corso di Laurea Magistrale IFIR alla Facoltà di Economia alla Sapienza Università di Roma.

Il mio obiettivo è che comunque possa risultare utile anche a studenti e studentesse di altri Atenei e in altri ambiti, come un piccolo compendio di teoria e metodologie elementari di Teoria delle Decisioni Finanziarie o, se vogliamo, di una specie di 'Matematica Finanziaria 2' o 'Matematica Finanziaria Avanzata'.

Come è noto, nei corsi di Matematica Finanziaria dei corsi di laurea triennale, almeno nelle Università italiane, per la maggior parte i programmi sono incentrati sulle decisioni finanziarie in caso di certezza. In altre parole, i fenomeni aleatori, gli shock, le dinamiche dei tassi con una parte non deterministica, e altri eventi incerti non sono trattati o lo sono in piccolissima parte.

Ma sappiamo bene che quasi i tutti i fenomeni e i comportamenti finanziari realmente esistenti sono aleatori, e quindi il passaggio dalla trattazione della certezza a quello dell'incertezza aumenta notevolmente il 'realismo' dei modelli e ci proietta molto più vicini a ciò che davvero accade ogni giorno sui mercati e nelle istituzioni finanziarie. Inoltre, un'altra differenza con la Matematica Finanziaria di base, è che la Teoria delle Decisioni è incentrata sulle scelte individuali e sui criteri di preferenza degli individui. Quindi, allo stesso tempo, fornisce una struttura matematica anche a quella parte di Economia teorica che studia l'utilità e i comportamenti razionali degli agenti.

In parte, questi appunti sono una rielaborazione e integrazione di alcuni capitoli di 3 testi che reputo fondamentali: prima di tutto, il fortunato 'Manuale di Finanza Vol.2: Teoria del Portafoglio e Mercato Finanziario' di Gilberto Castellani, Massimo De Felice e Franco Moriconi [CDFM] (Il Mulino, 2005), il più recente 'Matematica Finanziaria' (nei capitoli dall'8 al 10) di Giacomo Scandolo, pubblicato dalla casa editrice Amon nel 2013 e 'Teorie di Portafoglio e Analisi degli Investimenti' di Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown e William N. Goetzmann [EGBG], uscito nel 2017 per Apogeo, Maggioli Editore. Ho cercato di condensare i concetti fondamentali, mantenendo la trattazione discorsiva, riducendo al minimo le dimostrazioni e le derivazioni delle formule e inserendo qua e là esempi ed esercizi.

Un altro punto di riferimento per me è stato, come è tuttora, anche per la Matematica Finanziaria di base, il libro 'Matematica Finanziaria' di Franco Moriconi [M] del 1994, edito anch'esso da Il Mulino. A mio personale parere, l'approccio fornito da quel libro è di grande importanza, perchè immerge del tutto il rigore matematico nelle applicazioni di finanza 'pratica', con un taglio anche divulgativo. Nonostante abbia 26 anni di età, ne consiglio ancora molto la lettura, non solo e non necessariamente a studenti e studentesse, ma anche a chiunque voglia capire qualche principio e concetto economico-finanziario. Siamo in un'epoca in cui è assolutamente necessario che tutti e tutte migliorino le loro conoscenze su questi argomenti, e certi ottimi libri non vanno trascurati. In alcune parti, infine, mi sono ispirato a [C] e a [P].

In modo sintetico, saranno trattati alcuni cenni di Calcolo delle Probabilità di base, poi la Teoria delle Preferenze, la Teoria dell'Utilità, i criteri fondamentali delle scelte di portafoglio (come il modello di Markowitz), e infine 2 importanti modelli di grande rilevanza negli ultimi decenni come il Capital Asset Pricing Model (CAPM) e il Single Index Model (SIM).

Concludo questa breve Introduzione puntualizzando che queste dispense sono molto sintetiche e non sicuramente sufficienti per una preparazione veramente ricca e approfondita, e di conseguenza consiglio fortemente e vivamente lo studio di uno o più dei libri sopra citati.

Capitolo 2

Incertezza e decisioni finanziarie

2.1 Cenni di Calcolo delle Probabilità

Necessariamente, la nostra trattazione deve iniziare da alcuni cenni preliminari di Calcolo delle Probabilità, i cui principi di base sono indispensabili per la comprensione e la descrizione delle situazioni finanziarie in caso di incertezza. La notazione utilizzata è quella standard che si può trovare in ogni libro. Quello che vi propongo è una sintesi di concetti, risultati e formule fondamentali, mentre per ogni approfondimento ulteriore (vettori aleatori, catene di Markov, ecc.) vi rimando a testi più completi, ad esempio [B].

Prima di tutto, cos'è un fenomeno *incerto* o *aleatorio*? Possiamo definirlo come un qualsiasi scenario che prevede più di un possibile esito o risultato. E questo esito, non abbiamo la quantità di informazioni, o la capacità, o la possibilità, di saperlo con certezza. L'esito di un lancio di un dado, i 5 numeri che usciranno alla prossima estrazione del Lotto sulla ruota di Firenze, l'ordine di arrivo del Gran Premio d'Italia di Formula 1, i risultati del prossimo appello di Politiche Economiche Europee, il tasso di cambio del prossimo Venerdì tra Euro e Dollaro, il numero di contagiati dal Coronavirus domani in Italia, sono esempi di situazioni incerte, cioè aleatorie.

La definizione e la costruzione di una teoria complessiva che descriva l'universo aleatorio richiede una formulazione matematica rigorosa. Per dare vita a questa struttura, abbiamo bisogno di alcune definizioni iniziali, che fornirò in forma semplificata. Chiamiamo:

- Ω un **insieme di stati di natura**;

- **evento** un qualsiasi sottoinsieme di Ω (anche l'insieme vuoto, cioè $\emptyset$).

Gli eventi sono tipicamente indicati con le lettere maiuscole, come gli insiemi, e con la E. Una volta stabilite queste primissime definizioni, possiamo andare a considerare degli ulteriori tipi di eventi.

Definizione 1. *Dati 2 qualsiasi eventi $E_1,\ E_2$, chiameremo:*

- $E_1 \cup E_2$ ***evento unione****, corrispondente al verificarsi di almeno uno tra gli eventi E_1 ed E_2;*

- $E_1 \cap E_2$ ***evento intersezione****, corrispondente al verificarsi di entrambi gli eventi E_1 ed E_2;*

- E_1^C ***evento complementare*** *(anche indicato con $\overline{E_1}$), corrispondente al non verificarsi dell'evento E_1.*

Il nostro scopo è quello di associare ad ogni evento una funzione probabilità che ne quantifichi, appunto, la probabilità che esso avvenga.

Definizione 2. *Dato un insieme Ω, e l'insieme di tutti i suoi possibili eventi $\mathcal{E}$, un'applicazione $P : \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$ si dice **probabilità** se:*

1. $P(\Omega) = 1$;

2. *per ogni successione $\{E_n\}_n$ di elementi di $\mathcal{E}$ disgiunti a due a due, vale:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Fondamentalmente, la più intuitiva formula per calcolare una probabilità è la seguente[1]:

$$P(\text{un determinato evento } E) = \frac{\text{numero dei casi in cui } E \text{ si verifica}}{\text{numero di tutti i casi possibili}}.$$

Vediamo un piccolo esempio elementare per chiarire le idee.

Esempio 3. *Consideriamo un insieme numerico di stati di natura costituito dai numeri naturali dall'1 al 9, quindi:*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

[1] Altre notazioni molto utilizzate per indicare la probabilità che un evento E si verifichi, oltre a $P(E)$, sono anche $P\{E\}$, $Pr\{E\}$ oppure $Prob\{E\}$.

Ora, basandoci sulla struttura di Ω*, possiamo definire alcuni eventi e calcolarne in modo semplice la probabilità. Ad esempio:*

$$E_d = \{\textit{Scegliendo a caso un numero in } \Omega, \textit{ quel numero è dispari}\}.$$

$$E_p = \{\textit{Scegliendo a caso un numero in } \Omega, \textit{ quel numero è primo}\}.$$

$$E_4 = \{\textit{Scegliendo a caso un numero in } \Omega, \textit{ quel numero è divisibile per } 4\}.$$

Calcoliamo le rispettive probabilità:

$$P(E_d) = \frac{\textit{quantità di numeri dispari in } \Omega}{\textit{quantità di tutti gli elementi di } \Omega} = \frac{5}{9} = 0,555.$$

$$P(E_p) = \frac{\textit{quantità di numeri primi in } \Omega}{\textit{quantità di tutti gli elementi di } \Omega} = \frac{4}{9} = 0,444.$$

$$P(E_4) = \frac{\textit{quantità di numeri divisibili per } 4 \textit{ in } \Omega}{\textit{quantità di tutti gli elementi di } \Omega} = \frac{2}{9} = 0,222.$$

Possiamo esprimere le probabilità o come frazioni oppure come numeri decimali tra 0 *e* 1*, eventualmente approssimati alla cifra che vogliamo (qui alla terza). Oltre a questi eventi, come visto in precedenza, possiamo costruirne degli altri con unioni, intersezioni e complementari, ad esempio:*

$$E_d \cap E_p = \{\textit{Scegliendo a caso un numero in } \Omega, \textit{ il numero è sia dispari che primo}\}.$$

In questo caso,la probabilità è:

$$P(E_d) = \frac{\textit{quantità di numeri dispari e primi in } \Omega}{\textit{quantità di tutti gli elementi di } \Omega} = \frac{3}{9} = 0,333.$$

Oppure:

$$E_4^C = \{\textit{Scegliendo a caso un numero in } \Omega, \textit{ quel numero non è divisibile per } 4\},$$

e in questo caso la probabilità risulta:

$$P(E_4^C) = 1 - P(E_4) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} = 0,777.$$

E naturalmente, si può generare anche l'evento 'insieme vuoto', ad esempio non ci sono numeri sia primi che divisibili per 4*, quindi l'evento* $E_p \cap E_4 = \emptyset$*, e ovviamente* $P(\emptyset) = \frac{0}{9} = 0$.

In generale, per ogni fenomeno aleatorio si può costruire, in modo a volte oggettivo a volte soggettivo, uno spazio di probabilità. L'esempio precedente presenta delle probabilità oggettive, come anche tutti quelli che riguardano giochi come i dadi, le carte, il Lotto, la roulette, ecc.

Ma ad esempio, nel caso di un evento calcistico, differenti persone potranno associare differenti probabilità alla vittoria di una squadra o dell'altra oppure al pareggio.

Ora, ricordiamo altre formule essenziali, ricordando che due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** se non si possono verificare entrambi (come E_p ed E_4 nell'esempio precedente). In generale, se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili, come da definizione:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2), \qquad\qquad P(E_1 \cap E_2) = P(\emptyset) = 0.$$

Inoltre, dato un qualsiasi evento E:

$$P(E^C) = 1 - P(E). \tag{2.1.1}$$

La seguente formula, invece, si applica a qualsiasi coppia di eventi, anche non disgiunti, e lega tra loro le probabilità dei singoli eventi con le probabilità degli eventi unione e intersezione. Dati 2 eventi $E_1,\ E_2$:

$$P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2). \tag{2.1.2}$$

Dalla relazione (2.1.2) segue immediatamente anche la formula sulle probabilità complementari:

$$P(E_1^C) + P(E_2^C) = 2 - P(E_1 \cup E_2) - P(E_1 \cap E_2). \tag{2.1.3}$$

Nel seguente Esercizio, applichiamo la formula (2.1.2) a un problema di probabilità sulle carte da gioco.

Esercizio 4. ***Supponiamo di estrarre casualmente una carta da un mazzo di 40 carte napoletane e di voler calcolare la probabilità che la carta uscita non sia né un asso né una carta del seme dei Denari (detti anche Ori).***

Gli eventi da considerare saranno:

E_1=$\{$*la carta estratta è un asso*$\}$, *la cui probabilità è* $P(E_1) = \dfrac{1}{10}$;

E_2=$\{$*la carta estratta è un Denaro*$\}$, *la cui probabilità è* $P(E_2) = \dfrac{1}{4}$;

$E_1 \cap E_2$={la carta estratta è l'asso di Denari}, la cui probabilità è $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{40}$. La probabilità dell'evento unione, ossia che la carta estratta sia o un qualsiasi asso oppure un qualsiasi Denaro è data dalla formula (2.1.2):

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

Per concludere, la probabilità che la carta estratta non sia né un asso né un Denaro è l'evento complementare a $E_1 \cup E_2$, quindi applicando (2.1.1):

$$P((E_1 \cup E_2)^C) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = \frac{27}{40}.$$

Allo stesso risultato, ovviamente, si poteva arrivare sommando le 9 Spade ai 9 Bastoni alle 9 Coppe, vale a dire tutte le carte degli altri semi private dei rispettivi assi.

Un concetto di grande importanza, che emerge sia in Finanza che nella Matematica Attuariale, è quello della **probabilità condizionata**. In pratica, diamo una formulazione alle probabilità degli eventi quando siamo in possesso di un'informazione a priori, che condiziona il nostro evento.

Condizionare, o subordinare, la probabilità di un evento al verificarsi di un altro evento non implica necessariamente definire un evento condizionato, ma semplicemente raffinare la definizione dello stesso evento.

Definizione 5. *Dati 2 eventi E_1, E_2 con $P(E_2) > 0$, si dice **probabilità condizionata (o condizionale o subordinata)** di E_1 rispetto ad E_2 il seguente valore:*

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}. \tag{2.1.4}$$

$P(E_1 \mid E_2)$ rappresenta la probabilità che si verifichi E_1 data l'informazione che E_2 si è, contemporaneamente o in precedenza, verificato. Dalla Definizione 5, possiamo dedurre facilmente quella che é universalmente nota come **formula di Bayes**:

$$P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = P(E_2 \mid E_1)P(E_1).$$

Un ulteriore concetto cruciale nel Calcolo delle Probabilità, che sarà sviluppato in seguito nei modelli di portafoglio, riguarda l'analisi degli eventi e della loro correlazione, ossia di quanto uno di essi dipenda da un altro, o da tutti gli altri. Quando 2 eventi non hanno alcuna forma di correlazione, le cose sono particolarmente semplici.

Definizione 6. *2 eventi E_1 ed E_2 si dicono **indipendenti** se e solo se*

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2).$$

La Definizione precedente si può estendere automaticamente a $N > 2$ eventi.

Definizione 7. *N eventi $E_1, \dots E_N$ si dicono* ***a due a due indipendenti*** *se e solo se*

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j),$$

$\forall\ i \neq j,\ i,\ j = 1, \dots, N.$

Per sgomberare il campo da un classico (e pericoloso) luogo comune, ogni fenomeno aleatorio che si ripete con le stesse condizioni più di una volta, è un evento indipendente dal precedente, come il lancio ripetuto di una moneta, le estrazioni del Lotto, i sorteggi di qualsiasi tipo con rimpiazzo o reimbussolamento, la generazione di numeri casuali, ecc. Per questo motivo, ad esempio, è piuttosto insensato giocare al Lotto basandosi sui ritardi dei numeri, in quanto ad ogni estrazione, sempre se non truccata, l'evento è assolutamente indipendente dal precedente, e quindi le probabilità sono esattamente le stesse.

Cosa accade alla probabilità condizionata nel caso di indipendenza tra eventi? L'effetto risulta chiaro: se E_1 ed E_2 sono indipendenti, il fatto che E_2 si verifichi non condiziona in alcun modo il verificarsi di E_1 e infatti, usando la formula (2.1.4) e la definizione precedente, sempre se $P(E_2) > 0$, abbiamo:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_2)} = P(E_1),$$

ossia il vincolo di condizionamento di un evento ad un altro evento indipendente ne lascia uguale la probabilità.

Un gioco in cui è abbastanza naturale assistere a eventi indipendenti è la roulette (non quella russa), perchè ogni lancio di pallina è un evento indipendente dal precedente, equivalente a un'estrazione da un'urna con reimbussolamento, cioè con il ritorno alle condizioni iniziali dopo la prima estrazione.

Esempio 8. *Consideriamo il gioco della roulette, in cui una pallina viene lanciata e, dopo aver girato su una ruota nella cui circonferenza ci sono delle caselle numerate da* 0 *a* 36*, cade in una di quelle caselle. Supponiamo di fare* 3 *lanci di pallina, che corrispondono evidentemente a* 3 *eventi tra loro indipendenti, e costruiamo lo spazio di probabilità dell'uscita del numero* 0 *(è una scelta come un'altra, perché i numeri sono tutti equiprobabili). Abbiamo* 4 *possibili eventi:*

E_0=*{lo* 0 *non esce in nessun lancio};*

E_1=*{lo* 0 *esce in uno solo dei* 3 *lanci};*

E_2=*{lo* 0 *esce in* 2 *dei* 3 *lanci};*

E_3=*{lo* 0 *esce in tutti e* 3 *i lanci}.*

Calcoliamo le rispettive probabilità:

$$P(E_0) = \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} = \left(\frac{36}{37}\right)^3.$$

$$P(E_1) = \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{3 \cdot 36^2}{37^3}.$$

$$P(E_2) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} + \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{108}{37^3}.$$

$$P(E_3) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37^3}.$$

Analizzando brevemente queste probabilità, la cosa interessante da notare sta nel fatto che, pur essendo ogni lancio indipendente da tutte le altre, e quindi ad ogni giocata la probabilità di successo è sempre $1/37$*, la probabilità che un determinato numero non esca mai ad alcuna lancio diminuisce al passare dei lanci. Se nel nostro caso, al terzo tentativo,* $P(E_0) \simeq 0,921$*, continuando a lanciare, al 15esimo tentativo, tale probabilità diventerebbe circa* $0,663$ *e dopo soli* 100 *lanci scenderebbe già intorno allo* $0,064$*, e una probabilità circa del* 6% *è da considerare molto bassa.*

Nei modelli come quello descritto nell'esempio precedente, si utilizza sempre lo **Schema di Bernoulli (o Schema successo-insuccesso)**, che quantifica la probabilità di K successi su N prove, e che è una nota distribuzione discreta di probabilità. La formula di Bernoulli tiene anche conto delle varie combinazioni, come quelle che vediamo nei calcoli di $P(E_1)$ e $P(E_2)$, in cui abbiamo tenuto conto dei 3 diversi casi, tra loro incompatibili, di uscita dello 0 (ad esempio, nel caso di E_1, le uscite al primo, secondo o terzo tentativo vanno tutte tenute in conto).

In sintesi, dato una sequenza di N prove ripetute in modo indipendente, e data $p > 0$ la probabilità di successo sulla singola prova, la probabilità $\mathcal{P}$ che ci siano K successi su N prove è la seguente:

$$\mathcal{P} = \left(\begin{array}{c} N \\ K \end{array}\right) p^K (1-p)^{N-K}, \tag{2.1.5}$$

dove

$$\left(\begin{array}{c} N \\ K \end{array}\right) = \begin{cases} \dfrac{N!}{K!(N-K)!} & \text{se } N \geq K, \\ \\ 0 & \text{se } N < K \end{cases}$$

é il **coefficiente binomiale** N **su** K, e il simbolo ! indica il **fattoriale**:

$$s! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot s,$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$, e con la notazione $0! = 1$.

Tornando all'esempio della roulette, essendo la probabilità dell'uscita dello 0 nel singolo lancio $p = 1/37$, la probabilità di ottenere 2 successi su 3 lanci, vale a dire la probabilità dell'evento E_2, si puó calcolare con la (2.1.5):

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{3-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{37^2} \cdot \frac{36}{37} = \frac{108}{37^3}.$$

L'introduzione dello schema di Bernoulli ci conduce all'introduzione della nozione fondamentale per il nostro corso: la **variabile aleatoria**.

2.2 Variabili aleatorie discrete e continue

In generale, nei problemi che coinvolgono fenomeni non deterministici vengono considerate delle variabili che sono funzioni del risultato di un evento aleatorio. Torniamo ad appoggiarci alla struttura di Probabilità definita inizialmente.

Definizione 9. *Dato un insieme di stati di natura Ω, e la probabilità P ad esso associata, si dice* ***variabile aleatoria (o variabile casuale)****, spesso abbreviata in* ***v.a.****, una funzione $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che l'insieme $\{\omega \mid X(\omega) \leq t\}$ sia un sottoinsieme di Ω, e quindi un evento, per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Quindi, per non generare confusione, una v.a. attribuisce un valore ad ogni possibile stato di natura, mentre un evento è l'insieme degli stati di natura tali che il valore a loro attribuito dalla v.a. sia minore o uguale (o anche maggiore, in quanto complementare) di un qualsiasi numero reale, infiniti compresi.

Una v.a., solitamente indicata con una lettera maiuscola come X o Y, è dunque una funzione, definita su tutto l'insieme dei possibili risultati, tale che si possa calcolare la probabilità che essa prenda valori più piccoli di un qualsiasi numero reale t, compreso $+\infty$.

In questa maniera, stiamo fornendo una formulazione rigorosa di una funzione che associa dei valori numerici a dei fenomeni aleatori. Ci sono v.a. discrete e v.a. continue, e che i concetti che caratterizzano sia le une che le altre (distribuzione, valore atteso, varianza, ecc.), pur differenziandosi nelle formule, sono gli stessi.

Consideriamo una v.a. X che prenda al più un'infinità numerabile di valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, e semplifichiamo la notazione precedente omettendo l'argomento di ogni v.a., cioè descriviamo come eventi gli insiemi $\{X = x_i\}$, per ogni i.

Dunque, possiamo scrivere, per ogni t reale, l'insieme della definizione precedente come unione al più numerabile di eventi:

$$\{X \leq t\} = \bigcup_{x_i \leq t} \{X = x_i\}.$$

Va notato che tutti gli eventi $\{X = x_i\}$ sono a due a due disgiunti. Di conseguenza, per $t = +\infty$ l'unione degli eventi coincide con tutto Ω.

Il prossimo step è cruciale, e consiste nel definire la densità di una v.a.:

Definizione 10. *Data una v.a. discreta X, la funzione $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tale che $p(x) := P(\{X = x\})$ è una* ***densità*** *(o* ***legge*** *o* ***distribuzione****)* ***di probabilità*** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$p(x) = 0$ tranne al più in un'infinità numerabile di valori;*
2. $$\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1.$$

Esempio 11. *Definiamo una semplice v.a. discreta X che può prendere 4 diversi valori con 4 diverse probabilità:*

$$X = \begin{cases} x_1 = 3, & P(\{X = 3\}) = p_1 = 1/5; \\ \\ x_2 = 1, & P(\{X = 1\}) = p_2 = 3/10; \\ \\ x_3 = 0, & P(\{X = 0\}) = p_3 = 1/8; \\ \\ x_4 = -2, & P(\{X = -2\}) = p_4 = 3/8. \end{cases}$$

Notare che la densità di probabilità rispetta le 2 condizioni della Definizione di cui sopra, in quanto non è mai uguale a 0 (quindi lo è tranne in 4 casi), e inoltre:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8 + 12 + 5 + 15}{40} = \frac{40}{40} = 1.$$

Richiamiamo ora l'esempio della roulette e costruiamo, grazie allo Schema di Bernoulli, una densità discreta.

Esempio 12. *Supponiamo di lanciare un dado a 6 facce non truccato 5 volte e calcoliamo la probabilità che nei 5 lanci il numero 6 esca almeno 3 volte.*

Costruiamo la v.a. X che conta quante volte esce il numero 6, cioè

$\{X$ = numero di volte che esce il 6 su 5 lanci$\}$. La distribuzione relativa $P(\cdot)$ verrà da uno schema del tipo (2.1.5):

$$P(\{X = K\}) = \begin{pmatrix} 5 \\ K \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^K \left(\frac{5}{6}\right)^{5-K}.$$

Notare che gli unici valori che la v.a. X può prendere sono quelli relativi ai successi, cioè al numero di lanci il cui esito è 6, vale a dire 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Per calcolare la probabilità richiesta, la procedura più semplice consiste nel passare per la sua complementare, vale a dire prima calcolare la probabilità che il 6 esca al più 2 volte e poi sottrarla da 1. Si ha:

$$P(\{X \leq 2\}) = \sum_{J=0}^{2} \begin{pmatrix} 5 \\ J \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^J \left(\frac{5}{6}\right)^{5-J} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 +$$

$$+10\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^5 + 5 \cdot 5^4 + 10 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{2 \cdot 5^4}{6^4}.$$

Passando alla complementare, infine:

$$P(\{X \geq 3\}) = 1 - P(\{X \leq 2\} = \frac{6^4 - 2 \cdot 5^4}{6^4} \simeq 0,035493.$$

La distribuzione di Bernoulli descritta in questo caso è anche detta **legge binomiale** di parametri N (nel nostro caso, 5) e p (nel nostro caso, $1/6$) e si indica con la scrittura $B(N, p)$. Alla distribuzione di probabilità, anche nel caso continuo per la verità, è naturalmente legato anche il prossimo concetto:

Definizione 13. *Data una v.a. discreta X, si chiama **funzione di ripartizione** la funzione $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ tale che:*

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\}) = \sum_{x \leq t} p(x).$$

Quindi, conoscere la distribuzione di probabilità di una v.a. equivale in pratica a conoscerne la sua funzione di ripartizione. Alcune proprietà elementari della funzione di ripartizione sono:

- $$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0;$$

- $$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1;$$

- $F_X(t)$ è non-decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 14. *Data una v.a. discreta X, con distribuzione $p(\cdot)$, chiamiamo **media (o valore atteso o valor medio o speranza matematica) di** X il numero*[2]*:*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(\{X = x_i\}). \tag{2.2.1}$$

Applicando (2.2.1) alla variabile X dell'Esempio 11, la media risulta:

$$\mathbb{E}[X] = 3 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{3}{8} = \frac{24 + 12 - 30}{40} = \frac{6}{40} = 0,15.$$

La formula (2.2.1), in cui la sommatoria viene ovviamente calcolata su tutti i valori x_i presi dalla v.a. X, definisce effettivamente la media della v.a. quando la serie è convergente, cioè ha come somma un numero finito. Un'ipotesi che tipicamente viene posta prima della definizione è che tale sommatoria converga assolutamente, vale a dire $\sum_i |x_i| p(x_i) < +\infty$.

Enunciamo anche due importanti proprietà della media (la dimostrazione si può trovare su [B], pag. 46):

Proposizione 15. *Se X e Y sono due v.a. con media finita, allora:*

1. *anche la v.a. somma $X + Y$ ha media finita e inoltre:*

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y];$$

2. *per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$ anche la v.a. kX ha media finita e inoltre:*

$$\mathbb{E}[kX] = k\mathbb{E}[X].$$

Di seguito, vediamo un semplice Esempio di costruzione di una v.a. somma e verifichiamo la linearità della media.

Esempio 16. *Date le seguenti v.a.:*

$$X = \begin{cases} x_1 = 100, & P(\{X = 100\}) = p_1 = 1/2 \\ \\ x_2 = 200, & P(\{X = 200\}) = p_2 = 1/2 \end{cases},$$

$$Y = \begin{cases} y_1 = 50, & P(\{Y = 50\}) = q_1 = 3/5 \\ \\ y_2 = 70, & P(\{Y = 70\}) = q_2 = 2/5 \end{cases},$$

[2] La lettera $\mathbb{E}$ sta per *expectation* o anche *expected value*.

costruiamo la v.a. $X + Y$ *e verifichiamo che* $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

La v.a. $X + Y$ *è costruita considerando tutti i possibili casi di somme tra una determinazione di* X *ed una di* Y, *con le probabilità che sono i prodotti delle singole probabilità, vale a dire:*

$$X + Y = \begin{cases} x_1 + y_1 = 150, & P(\{X + Y = 150\}) = p_1q_1 = 3/10 \\ \\ x_1 + y_2 = 170, & P(\{X + Y = 170\}) = p_1q_2 = 1/5 \\ \\ x_2 + y_1 = 250, & P(\{X + Y = 250\}) = p_2q_1 = 3/10 \\ \\ x_2 + y_2 = 270, & P(\{X + Y = 270\}) = p_2q_2 = 1/5 \end{cases}.$$

Notiamo facilmente che $\mathbb{E}[X] = 150$, $\mathbb{E}[Y] = 58$, *e anche che*

$$\mathbb{E}[X+Y] = 150\cdot\frac{3}{10}+170\cdot\frac{1}{5}+250\cdot\frac{3}{10}+270\frac{1}{5} = 45+34+75+54 = 208 = \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y].$$

La media è tra gli strumenti matematici più noti ed usati anche nel linguaggio comune, a tutti i livelli. In un certo senso, anche quando alle Scuole Superiori calcoliamo la media aritmetica degli N voti di un quadrimestre, non facciamo altro che considerare inconsciamente una distribuzione di probabilità in cui ogni voto incide per un N-esimo, cioè stiamo calcolando la media di una v.a. che ha come determinazioni i singoli voti, ognuno dei quali occorre con probabilità $1/N$. Quando le probabilità sono diverse da $1/N$, la media che calcoliamo nel linguaggio comune è detta *pesata* o *ponderata*.

Il secondo concetto fondamentale per le v.a. è quello di varianza, che è una misura della dispersione della v.a. X attorno al suo valor medio, ossia è tanto più grande quanto più i valori presi da X sono lontani dalla sua media.

Definizione 17. *Data una v.a. discreta* X, *con media finita, si chiama* ***varianza di*** X ***(o momento centrato del secondo ordine di*** X***)*** *il numero:*

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \tag{2.2.2}$$

Inoltre, si chiama ***deviazione standard di*** X *la radice quadrata della sua varianza:*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

La definizione di deviazione standard è ben posta in quanto la varianza di una v.a. è sempre non negativa. Nel seguente esempio, calcoleremo media, varianza e deviazione standard di una v.a. discreta.

Esercizio 18. ***Consideriamo un'azione il cui valore iniziale è*** 300 ***euro, e che dopo un anno segue questo andamento: o aumenta del*** 20% ***con probabilità*** $1/5$***, o aumenta del*** 10% ***con probabilità*** $3/10$***, o diminuisce del*** 10% ***con probabilità*** $1/2$***. Calcolare la media della v.a.*** X ***che indica il valore dell'azione tra un anno, la sua varianza e la sua deviazione standard.***

Per cominciare, scriviamo in forma estesa la v.a. X*, omettendo che si tratta di cifre in euro:*

$$X = \begin{cases} x_1 = 300 + 300 \cdot 0,2 = 360, & p_1 = 1/5 \\ \\ x_2 = 300 + 300 \cdot 0,1 = 330, & p_2 = 3/10 \\ \\ x_3 = 300 - 300 \cdot 0,1 = 270, & p_3 = 1/2 \end{cases}.$$

Il valor medio di X *è immediatamente calcolabile:*

$$\mathbb{E}[X] = 360 \cdot \frac{1}{5} + 330 \cdot \frac{3}{10} + 270 \cdot \frac{1}{2} = 72 + 99 + 135 = 306,$$

quindi $306 - 300 = 6$ *si può interpretare come il guadagno medio dall'azione dopo un anno. Per calcolare invece la varianza di* X*, prima scriviamo la v.a.* $(X - \mathbb{E}[X])^2$ *per esteso:*

$$(X - \mathbb{E}[X])^2 = \begin{cases} x_1 = (360 - 306)^2 = 54^2 = 2916, & p_1 = 1/5 \\ \\ x_2 = (330 - 306)^2 = 24^2 = 576, & p_2 = 3/10 \\ \\ x_3 = (270 - 306)^2 = (-36)^2 = 1296, & p_3 = 1/2 \end{cases}.$$

Di conseguenza, applicando (2.2.2) otteniamo:

$$Var(X) = 2916 \cdot \frac{1}{5} + 576 \cdot \frac{3}{10} + 1296 \cdot \frac{1}{2} = 583,2 + 172,8 + 648 = 1404.$$

Infine la deviazione standard di X*, che approssimiamo alla terza cifra decimale:*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1404} = 37,47.$$

Grazie alle proprietà della media, possiamo ricavare un'interessante ed utile formula alternativa per il calcolo della varianza, in realtà quella più comunemente usata:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2,$$

e sommando gli ultimi 2 termini otteniamo:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \tag{2.2.3}$$

Torniamo brevemente all'esempio precedente e calcoliamone la varianza con la (2.2.3), tenendo presente che la v.a. X^2 ha come determinazioni le x_j^2 con le stesse probabilità p_j, quindi:

$$X^2 = \begin{cases} x_1^2 = 360^2 = 129600, & p_1 = 1/5 \\ \\ x_2^2 = 330^2 = 108900, & p_2 = 3/10 \\ \\ x_3^2 = 270^2 = 72900, & p_3 = 1/2 \end{cases} .$$

Avremo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 129600 \cdot \frac{1}{5} + 108900 \cdot \frac{3}{10} + 72900 \cdot \frac{1}{2} - 306^2 = \\ &= 25920 + 32670 + 36450 - 93636 = 1404. \end{aligned}$$

Accenniamo ora ad un'altra importante distribuzione, che è tra l'altro utilizzata per approssimare la binomiale e che trova spazio in molti modelli probabilistici, in particolare quelli in cui si ha un grandissimo numero di prove indipendenti e una probabilità di successo piccolissima, vale a dire la **distribuzione di Poisson di parametro** $\lambda > 0$:

$$P(\{X = K\}) = \frac{\lambda^K}{K} e^{-\lambda}.$$

Da notare che il fattore $e^{-\lambda}$ è normalizzante, nel senso che serve a verificare la proprietà 2) della definizione di distribuzione, infatti per il noto sviluppo in serie della funzione esponenziale, valido per ogni esponente positivo, si ha:

$$e^{\lambda} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} \implies P(\{X \leq +\infty\}) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} = 1.$$

Possiamo infine notare che il parametro λ risulta coincidere sia con il valor medio sia con la varianza di una v.a. distribuita secondo Poisson (quindi al crescere della sua media ne cresce anche la dispersione):

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Come abbiamo visto in precedenza, il calcolo della media di una v.a. somma di due v.a. è immediato, quando esse hanno entrambe media finita, per una semplice proprietà di linearità. Ben maggiori sono le complicazioni che dobbiamo affrontare per il calcolo della varianza di una somma di v.a. del tipo $X+Y$; proviamo a seguire una strada standard:

$$\mathbb{E}\left[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2\right] = \mathbb{E}\left[((X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y]))^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right] + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])],$$

e nell'ultima espressione compaiono come addendi la varianza di X, quella di Y, e infine un nuovo termine che inevitabilmente dipende da entrambe le variabili.

Definizione 19. *Date 2 v.a. X e Y, si definisce* ***covarianza di*** X ***e*** Y *il numero:*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])].$$

Con questa nuova definizione, possiamo scrivere in modo completo la varianza di $X+Y$:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

La covarianza è un concetto rilevante: possiamo dimostrare che se essa è uguale a 0, le v.a. X e Y sono indipendenti, ma inoltre quanto più essa è prossima allo 0, tanto meno X e Y dipendono l'una dall'altra. Se poi la covarianza è positiva, esse aumentano o diminuiscono all'unisono, mentre se è negativa, all'aumentare dell'una l'altra tende a diminuire e viceversa. In generale, definiamo a questo scopo un ulteriore coefficiente:

Definizione 20. *Date le v.a. X e Y con deviazioni standard σ_X e σ_Y, si chiama* ***coefficiente di correlazione*** *il numero seguente:*

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Se $\rho_{XY} > 0$, le v.a. X e Y sono **correlate positivamente**, cioè se una delle due aumenta, aumenta anche l'altra, mentre se una delle due diminuisce, diminuisce anche l'altra.

Se $\rho_{XY} < 0$, le v.a. X e Y sono **correlate negativamente**, cioè se una delle due aumenta, l'altra diminuisce e viceversa.

Se $\rho_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, allora X e Y sono **scorrelate o non correlate o indipendenti**.

Proprio questa stessa procedura sarà ripetuta, con qualche lieve cambiamento di notazione, nel Capitolo 5 sulla Teoria del Portafoglio, intendendo X e Y come v.a. che rappresentano i rendimenti di 2 diversi titoli rischiosi. Approfondiremo anche la trattazione sulla correlazione, il cui significato è molto importante in uno scenario finanziario.

La naturale prosecuzione di questa trattazione riguarda le **variabili aleatorie (o v.a.) continue**, che sono strumenti più intuitivi di quelle discrete, visto che sono fortemente legate alle funzioni di 1 variabile già viste e studiate nel primo corso di Matematica (Matematica Generale oppure Matematica Corso Base) del primo anno di Università.

Nella teoria delle v.a. continue si ritrovano i concetti già visti per le v.a. discrete, a parte alcune differenze tecniche, che sono le tipiche differenze che intercorrono tra la Matematica del discreto e quella del continuo. In particolare, le sommatorie vengono sostituite dagli integrali, le densità sono funzioni continue, e via dicendo. Non occorre ri-definire la variabile aleatoria nel continuo, ma ciò che invece dobbiamo ri-definire sono densità e funzione di ripartizione.

Definizione 21. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice una* ***densità (o distribuzione o legge)*** *se valgono le seguenti proprietà*[3]*:*

1. $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$*;*
2. $f(x)$ *é integrabile su tutto* $\mathbb{R}$*;*
3. $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Come si può immaginare, la proprietà 3), che impone che l'integrale della densità su tutto $\mathbb{R}$ sia uguale a 1, è esattamente analoga alla somma delle probabilità p_j, $j = 1, \ldots, N$, che deve essere uguale a 1 nel caso discreto. Quindi anche la probabilità stessa, in questo caso, nasce da un calcolo di integrale definito.

Definizione 22. *Data la v.a. X con funzione di ripartizione*[4] *$F(x)$, diremo che X ha densità $f(x)$ se F è primitiva di f, ossia:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

o, equivalentemente, se

$$P(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} f(t)dt.$$

[3]Un'altra denominazione molto usata è **p.d.f.** (o **pdf**), vale a dire, in Inglese, **probability density function**.

[4]La funzione di ripartizione di una v.a. continua è invece spesso denominata con **c.d.f.** (o **cdf**), vale a dire, **cumulative distribution function**.

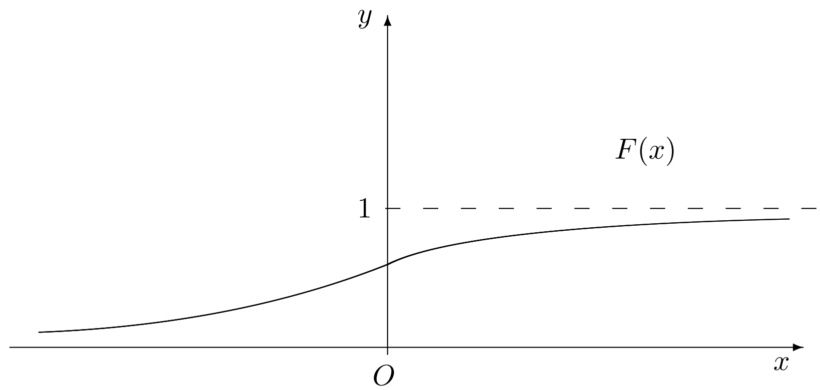

Figura 1. Tipico grafico di una funzione di ripartizione di una v.a. continua

Di conseguenza, la probabilità che X assuma valori compresi in un dato intervallo $[a, b]$ si ricava semplicemente dalle proprietà degli integrali:

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Inoltre, la probabilità che invece X prenda valori maggiori di un certo numero, si calcola per differenza con 1, ossia:

$$P(\{X > k\}) = 1 - P(\{X \leq k\}) = 1 - F(k) = \int_k^{+\infty} f(t)dt.$$

Esempio 23. *La più semplice tra le densità delle v.a. continue è la cosiddetta distribuzione uniforme, definita dalla funzione:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & se\ t \in (0,1) \\ 0 & se\ \ t \leq 0 \ \ oppure\ t \geq 1 \end{cases} . \tag{2.2.4}$$

Evidentemente, (2.2.4) verifica tutte le ipotesi della definizione di densità, e in particolare è integrabile anche se discontinua in un numero finito di punti (due).

Quindi, ogni v.a. X *distribuita uniformemente è tale che, per ogni* a, $b \in [0, 1]$ *si ha:*

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = \int_a^b dt = b - a.$$

La sua cosiddetta uniformità deriva dal fatto che la probabilità che X *prenda valori in un dato intervallo dipende solo dall'ampiezza di quell'intervallo e non da dove esso si trova.*

Vediamo ora come ri-definire media e varianza in uno scenario continuo.

Definizione 24. *Data una v.a. X continua, di densità $f(\cdot)$, si dice che X ha media finita se e solo se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty.$$

Definizione 25. *Se X ha media finita, si chiama* ***media (o valore atteso o speranza matematica)*** *di X il numero:*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{2.2.5}$$

Fondamentalmente, tutte le proprietà della media di una v.a. discreta si ripropongono nella teoria delle v.a. continue, quindi la media di una somma di 2 v.a. è la somma delle medie, e via dicendo. Se poi anche la v.a. $(X - \mathbb{E}[X])^2$ ha media finita, possiamo ridefinire anche la varianza, utilizzando la stessa legge $f(x)$:

Definizione 26. *Si chiama* ***varianza*** *della v.a. continua X il seguente integrale:*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx. \tag{2.2.6}$$

E inoltre, vale anche qui la formula (2.2.3). Più complessa risulta invece la trattazione del prodotto di v.a. e della covarianza, per cui servono gli integrali doppi, e che qui non sarà affrontata.

Esempio 27. *Consideriamo una v.a. continua X distribuita secondo una nuova densità detta* ***densità esponenziale di parametro*** *λ, definita da:*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & se \quad t > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} . \tag{2.2.7}$$

Quindi, possiamo schematizzare la ripartizione di X in questo modo:

$$P(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Calcoliamo la media di X, applicando la formula (2.2.5) e usando l'integrazione per parti:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 1 \cdot \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right) dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0-0] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Calcoliamo ora la varianza di X, usando la formula (2.2.3), dopo aver ricavato che

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[\frac{x^2 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0-0] + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \right) = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Applicando (2.2.3), otteniamo:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ad esempio, supponiamo di avere una v.a. continua X distribuita secondo una densità di Poisson di parametro $\lambda = 3$ e calcoliamo la probabilità che X prenda valori maggiori di $k = 1$.

In questo caso, la densità è $f(x) = 3e^{-3x}$ e l'integrale definito da calcolare è:

$$P(\{X > 1\}) = \int_1^{+\infty} 3e^{-3x} dx.$$

Integrando in modo elementare, otteniamo:

$$3 \int_1^{+\infty} e^{-3x} dx = 3 \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_1^{+\infty} = (-1)(0 - e^{-3}) = 0,0502,$$

quindi la probabilità che una v.a. continua distribuita secondo una Poisson di parametro 3 ottenga valori maggiori di 1 è circa del 5,02%.

La densità esponenziale è particolarmente indicata nelle applicazioni in cui si deve modellizzare la durata di vita degli organismi biologici, e quindi anche delle persone, o il tempo di affidabilità di lungo periodo nei sistemi meccanici.

Esempio 28. *Una delle più note ed importanti distribuzioni di probabilità, di cui si fa larghissimo uso nelle Scienze Sociali, nelle Scienze Naturali, ecc., è la* ***distribuzione normale (o Gaussiana)****, di media μ e varianza σ^2, la cui densità è data da una funzione a campana (questa forma si ripropone anche in più variabili):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

*Il caso più semplice è la **normale standard** con media nulla e varianza unitaria:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

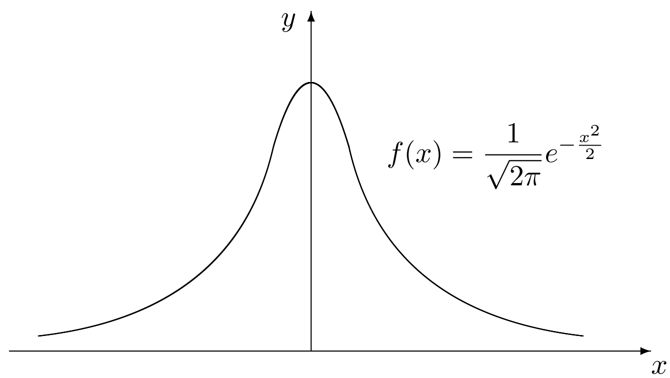

Figura 2. *Gaussiana ad 1 variabile di media nulla e varianza uguale a 1*

Quando una v.a. continua è distribuita normalmente, si usa la notazione rapida: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Come è noto, la densità gaussiana è una funzione che non può essere integrata con metodi standard, o meglio non ha una primitiva esprimibile tramite funzioni elementari, per cui per calcolare le probabilità si usano forme di approssimazione, che si trovano nelle tavole dei libri di Statistica (stessa cosa per la t-Student e per altre distribuzioni).

2.3 Dalla Finanza certa a quella incerta

Abbiamo ora in mano una serie di strumenti adeguati a gestire problemi e descrivere modelli anche in situazioni di incertezza. Possiamo delineare il concetto di **incertezza** nei fenomeni finanziari e nei loro modelli anche mettendolo a confronto con il suo esatto opposto: la certezza. Quando parliamo di certezza, nella Matematica Finanziaria elementare, rappresentiamo un mondo che non ha elementi che non siano perfettamente determinati fin dall'inizio. Nell'ambito dell'incertezza, invece, troviamo in genere almeno una variabile aleatoria, discreta o continua, che ingloba i possibili esiti. Facciamo 2 semplici esempi di investimenti finanziari, uno certo e l'altro incerto.

Esempio 29. *Consideriamo le seguenti operazioni finanziarie*[5]*:*

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-97,\ 100\}\,/\,\{0,\ 1\}\,,$$

$$\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{-100,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 105\}\,/\,\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3\}\,.$$

Entrambe indicano degli investimenti certi. La prima fa corrispondere alla spesa iniziale di 97 *euro dell'investitore al tempo* 0 *un ricavo sicuro di* 100 *euro dopo* 1 *anno. Notare che può anche essere visto come l'acquisto al tempo* 0 *di un titolo obbligazionario (ad esempio, un classico* ***BoT****) il cui prezzo di emissione è* 97 *euro e il cui valore nominale di rimborso è, come di consueto,* 100 *euro.*

La seconda è invece un ***BTp*** *triennale a cedola fissa semestrale del* 5%*, quotato alla pari, cioè con prezzo di acquisto uguale a valore di rimborso, al solito* 100*. Entrambi i titoli sono modellizzati con ricavi certi, nel primo caso il valore di rimborso, nel secondo caso il flusso cedolare da* 6 *mesi fino al terzo anno. Essendo Titoli di Stato, al netto di estreme criticità del mercato e di un possible default, eventualità comunque remotissima nella storia (comunque mai avvenuto negli ultimi decenni, nemmeno dopo la crisi* 2010-2011*), gli importi scambiati in questa operazione sono certi.*

Esempio 30. *La prossima operazione finanziaria, leggermente più complessa, presenta invece il carattere dell'incertezza, in quanto c'è un'****opzione binaria****. Essa è forse il caso più semplice di titolo* ***derivato****, ossia che deriva il proprio valore da un altro titolo, cosiddetto il suo* ***sottostante****.*

*In particolare, parliamo di un'****opzione call europea****, che dà al possessore dell'opzione il diritto di comprare una o più azioni del titolo sottostante, alla scadenza della suddetta opzione. Gli elementi fondamentali di una operazione con un'opzione sono: il* ***prezzo d'acquisto*** C_0*, il* ***prezzo d'esercizio (strike price)*** k_C*, e il valore del titolo sottostante alla scadenza del contratto, indicato solitamente con una v.a., ad esempio* V*. Per semplificare al massimo, supponiamo che la durata del contratto d'opzione sia di* 1 *anno, ossia che venga venduta al tempo* 0 *e che scada al tempo* 1*, in cui chi la possiede deve decidere se esercitarla o non esercitarla.*

Se al tempo finale il corso dell'azione sottostante é maggiore dello strike price, vale a dire $V > k_C$*, il possessore ha convenienza ad esercitare l'opzione. Infatti, comprando il titolo sottostante può immediatamente rivenderlo al prezzo corrente* V*, e guadagnare quindi* $V - k_C - C_0$ *da tutta l'operazione (*C_0 *é il prezzo di acquisto iniziale), sempre se tale quantità é positiva.*

Invece, chi ha emesso la call, subisce una perdita, in quanto deve acquistare un'azione al prezzo corrente V *e venderla al prezzo di esercizio* k_C*, perdendo*

[5] La notazione è quella standard della Matematica Finanziaria, vedi ad esempio [M] oppure [P].

in tutta l'operazione l'ammontare $V - k_C$*, con il solo guadagno iniziale di* C_0*. Possiamo dunque sintetizzare il valore della call con la seguente formula:*

$$\max\{0,\ V - k_C\},$$

dove con l'operatore max *si intende il valore massimo tra i valori di un insieme, in questo caso costituito da soli* 2 *elementi.*

Nel caso binomiale, c'è una probabilità p *di aumento del titolo e* $1-p$ *è invece la probabilità di diminuzione. Detto* i^* *il tasso risk-free di mercato e rispettivamente* u *e* d *le percentuali di aumento e diminuzione, il valore della call è:*

$$C = \frac{1}{1+i^*}\left(C_u \frac{i^* - d}{u-d} + C_d \frac{u - i^*}{u-d}\right) = \frac{1}{1+i^*}\left(p \cdot C_u + (1-p)C_d\right). \qquad (2.3.1)$$

Supponiamo di avere il titolo del Littoria Calcio, squadra quotata in borsa dopo il fallimento, che all'istante iniziale ha il valore di 200 *euro e che una call scritta su questo titolo ha prezzo di esercizio di* 195 *euro. Sapendo che il tasso risk-free di mercato corrisponde all'*1,1% *e che al tempo finale l'azione potrà aumentare dell'*1,9% *oppure diminuire del* 2,9%*, calcoliamo il valore della call relativa.*

Ricordando le formule viste in precedenza, i valori dati sono $u = 0,019$*,* $i^* = 0,011$*,* $d = -0,029$*,* $V_0 = 200$*,* $k_C = 195$*. Calcoliamo preliminarmente i valori all'istante finale del titolo (*V_u *nel caso di aumento e* V_d *nel caso di perdita):*

$$V_u = 200(1 + 0,019) = 203,8 \textit{ euro}, \qquad V_d = 200(1 - 0,029) = 194,2 \textit{ euro},$$

e di conseguenza $C_u = 203,8 - 195 = 8,8$*, mentre* $C_d = 0$ *in quanto* $V_d < k_C$*. Le rispettive probabilità di aumento e di diminuzione del titolo sono date da:*

$$p = \frac{i^* - d}{u - d} = \frac{0,04}{0,048} = 83,\overline{3}\%, \qquad 1 - p = \frac{u - i^*}{u - d} = \frac{0,008}{0,048} = 16,\overline{6}\%.$$

Per concludere, il valore della call sarà quindi dato da:

$$C = \frac{1}{1,011}\left(8,8 \cdot 0,8333 + 0 \cdot 0,1666\right) = 7,253 \textit{ euro}.$$

Per estendere l'Esempio precedente, poniamoci in una situazione più generale. Supponiamo che un qualsiasi *individuo* $\mathcal{I}$ (ma potremmo dire anche *agente* o *decisore* o in altri modi, naturalmente a seconda dello scenario economico o finanziario in cui ci stiamo muovendo) al tempo iniziale, diciamo t_0, debba scegliere se effettuare una determinata transazione. Questa transazione avrà effetto sulla sua posizione finanziaria futura al tempo finale, che chiamiamo t_1, con $t_1 > t_0$, naturalmente. Nel caso in cui effettuerà questa azione, la sua posizione finanziaria al tempo t_1 diventerebbe X, mentre se non la effettuerà, la sua posizione ammonterà a Y. Entrambe queste somme, X e Y, sono di natura incerta, quindi descrivibili tramite variabili aleatorie. In questo caso, l'eventuale guadagno per l'individuo, tipicamente denominato **payoff**, si può indicare con la variabile $G = Y - X$, anch'essa aleatoria in quanto differenza di v.a. (qui non stiamo tenendo in considerazione alcuna attualizzazione). Il prossimo Esempio, riadattato da un esempio in [CDFM] nella Sezione 1.1 formalizza meglio lo scenario di un problema di scelta in un mercato di ZCB (*zero coupon bond*, cioè titolo che non paga cedole intermedie, come il BoT o il CTz). In un certo senso, quello che vedremo è uno scenario molto basilare di *diversificazione* degli investimenti.

Esempio 31. *In un mercato obbligazionario sono quotati dei ZCB di valore di rimborso* 1 *euro (normalizzato, non cambierebbe nulla se il valore fosse* 100 *o* 1000 *euro), assunti come privi di rischio*[6]*, e aventi prezzo v al tempo iniziale* 0*. In questo mercato, in cui si possono effettuare azioni solo alle date* 0 *e* 1*, circola anche un titolo rischioso che ha quotazione q.*

Quindi, alla data 1*, chi possiede uno ZCB otterrà il rimborso di* 1 *euro, mentre chi sarà in possesso dell'asset rischioso ne avrà in mano il valore aleatorio, che possiamo chiamare A, laddove A è una variabile aleatoria.*

Supponiamo che l'individuo $\mathcal{I}$ possieda un patrimonio $p > 0$, e che voglia investirlo in ZCB privi di rischio. Chiamando X il numero di titoli certi da acquistare al prezzo v e spendendo l'intero patrimonio iniziale p, si ha che

$$p = Xv \qquad \Longrightarrow \qquad X = \frac{p}{v},$$

che al tempo finale frutterebbe tale quantità moltiplicata per 1*, ossia un rimborso di* 1 *euro per ogni titolo certo comprato.*

Se invece volesse diversificare l'investimento, potrebbe vendere una parte di questi titoli, diciamo $\frac{p^*}{v}$, con $p^* < p$. Il ricavo di questa vendita sarà $\frac{p^*}{v} \cdot v = p^*$. Investendo poi il ricavo p^* in asset rischiosi, in portafoglio ce ne sarà la quantità $\frac{p^*}{q}$. Avendo composto così il suo portafoglio, la sua posizione finanziaria al tempo finale sarebbe:

$$Y = \frac{p - p^*}{v} + \frac{Ap^*}{q},$$

[6]Pensiamo a dei bond 'tripla A', o comunque a rischio praticamente nullo.

e di conseguenza il suo payoff sarà dato dalla variabile G (che sta per guadagno):

$$G = Y - X = p^* \left(\frac{A}{q} - \frac{1}{v} \right).$$

Dunque risulta semplice determinare il livello benchmark del valore dell'asset sotto il quale la strategia è in perdita:

$$G < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A < \frac{q}{v}.$$

Se invece $A > q/v$, il payoff all'anno 1 è positivo.

Consideriamo questo stesso esempio sostituendo dei numeri dati: se $p = 5000$ euro, $p^* = 3000$ euro, $v = 0,98$ e $q = 0,86$, allora

$$G = 3000 \cdot \left(\frac{A}{0,86} - \frac{1}{0,98} \right) = 3.488,372A - 3.061,224,$$

e di conseguenza $G > 0$ se $A > 0,877$.

Il prossimo esempio è numerico, e serve a chiarificare meglio il problema di scelta dell'individuo, anch'esso è liberamente ispirato all'Esempio 1.1.1 del [CDFM].

Esempio 32. *Supponiamo che l'individuo $\mathcal{I}$ possieda un patrimonio $p = 10000$ euro al tempo $t = 0$, e che intenda investire tutto in ZCB privi di rischio, che assicurano dopo 1 anno un rendimento al tasso annuo del $2,3\%$ (quindi con prezzo unitario $v = (1,023)^{-1} = 0,977$). La posizione X dopo 1 anno dell'individuo è quindi del tutto deterministica, e in assenza di ulteriori scelte, il suo ricavo finale sarà:*

$$X = 10000 \cdot 1,023 = \frac{10000}{0,977} = 10230 \text{ euro}.$$

Supponiamo che inoltre, sul mercato, siano quotati sul mercato dei ZCB rischiosi, e quindi, con rendimento maggiore. Poniamo il prezzo di ciascun ZCB $q = 0,945$ (che corrisponderebbe a un rendimento di $i = 1/q - 1 = 5,82\%$ annuo), ma essendo essi rischiosi, possono valere al tempo 1 o $0,9$ oppure $1,3$ (le due possibili determinazioni per la v.a. A). Nel primo caso, ci sarebbe una perdita, nel secondo invece un guadagno. Chiamiamo come sopra A la variabile aleatoria che indica il valore di ogni ZCB al tempo finale.

Il problema di scelta per I consiste nel decidere se destinare la metà del suo patrimonio all'acquisto degli ZCB rischiosi al tempo $t = 0$. In tal caso, la sua posizione finale sarebbe

$$Y = \frac{5000}{0,977} + \frac{5000 \cdot A}{0,945} = 5115 + 5291,005A.$$

Chiamando quindi $G = Y - X$ la differenza tra i due, si ha:

$$G = 5291{,}005A - 5115 = \begin{cases} 1763{,}3065 \text{ \textit{se il valore di ogni ZCB è} } 1{,}3 \\ \\ -353{,}0955 \text{ \textit{se il valore di ogni ZCB è} } 0{,}9 \end{cases} .$$

Essendo A una v.a. con 2 possibili esiti, è naturale caratterizzarla con una distribuzione di probabilità. Ad esempio, supponiamo che all'esito migliore, cioè $A = 1{,}3$ si attribuisca (da parte di I o di chi per lui) probabilità $0{,}55$ e all'esito opposto la sua complementare, vale a dire:

$$A = \begin{cases} 1{,}3 \quad \text{\textit{con probabilità}} \;\; 0{,}55 \\ \\ 0{,}9 \quad \text{\textit{con probabilità}} \;\; 0{,}45 \end{cases} .$$

A questo punto, possiamo definire il payoff atteso, ossia la media della variabile aleatoria G, col simbolo standard di valore atteso:

$$\mathbb{E}[G] = 1763{,}3065 \cdot 0{,}55 - 353{,}0955 \cdot 0{,}45 = 810{,}9256.$$

Chiaramente, nell'Esempio 32 il valore del guadagno atteso dipende dalla distribuzione di probabilità scelta, o, comunque, considerata. Come già sappiamo bene, ci sono eventi i cui esiti hanno una distribuzione di probabilità fissa e oggettiva (lancio di dadi, giro di roulette, ecc.) ed altri in cui la probabilità è soggettiva (partita di calcio, valore delle azioni in Borsa, ecc.). In questo caso, anche se supportata da una serie di informazioni e considerazioni, come l'andamento storico di quello specifico titolo o la situazione politico-economica del momento, la probabilità da attribuire agli esiti di A è arbitraria.

Un altro possibile esempio di scelta da affrontare riguarda la stipula o meno di un contratto di assicurazione. In un certo senso, anche le opzioni binarie descritte nell'Esempio 30 e altri prodotti derivati più complessi svolgono il ruolo di contratti assicurativi in ambito finanziario. Vediamo il successivo Esempio, soltanto accennato.

Esempio 33. *Supponiamo di avere un determinato patrimonio p e che entro un anno potrà verificarsi un evento (disastro naturale, furto, sequestro, ecc.) che comporterà una certa perdita L. L'individuo I può assicurarsi stipulando un contratto che lo copra dalla perdita, ma al prezzo di stipula S. Quindi in questo caso, se il contratto non viene stipulato, la posizione rischiosa, senza alcuna scelta, è $X = p - L$. Se invece il contratto è stipulato e il prezzo S pagato, la posizione è $Y = p - S - L + L = p - S$. Quindi il payoff G ammonta a:*

$$G = Y - X = L - S,$$

che chiaramente è positivo se la perdita è superiore al premio assicurativo, negativo se vale il viceversa. Questo caso è particolarmente semplice e non tiene in conto tutte le possibili complicazioni dei contratti assicurativi, che possono essere a premi periodici, naturali, eccetera.

Qui non abbiamo preso in esame elementi fondamentali ma che complicano il problema, come la probabilità che si verifichi l'evento che comporta la perdita L. Scritta in questi termini, è semplice capire che il guadagno G risulta positivo solo se il costo del contratto di assicurazione è minore dell'entità della perdita. Se esistesse soltanto questo contratto di assicurazione, sarebbe impossibile, perchè la Compagnia di Assicurazione andrebbe sicuramente fallita (ed è per questo che normalmente si ricorre a una serie di *caricamenti*, ma questo è un altro argomento).

2.4 Esercizi proposti

1. Calcolare la probabilità che, pescando una carta da un mazzo di 40 carte, esca fuori almeno un asso, di qualsiasi seme, su 10 diversi tentativi, ogni volta usando il mazzo intero. [circa $0,651$]

2. Data la seguente v.a.:

$$X = \begin{cases} x_1 = 10, & P(\{X = 10\}) = p_1 = 1/12 \\ \\ x_2 = 20, & P(\{X = 20\}) = p_2 = 1/4 \\ \\ x_3 = -20, & P(\{X = -20\}) = p_3 = 2/3 \end{cases},$$

calcolarne media e varianza. $\left[\mathbb{E}[X] = -\dfrac{10}{3}; \quad \mathrm{Var}(X) = \dfrac{1675}{9}\right]$

3. Data la seguente v.a.:

$$X = \begin{cases} x_1 = 100, & P(\{X = 100\}) = \alpha \\ \\ x_2 = 150, & P(\{X = 150\}) = 1 - \alpha \end{cases},$$

stabilire per quali eventuali valori di α si ha che Var$(X) = 96$.

$$\left[\alpha = \frac{1}{25} \text{ oppure } \alpha = \frac{24}{25}\right]$$

4. Data una v.a. continua X distribuita secondo la distribuzione $f(x) = e^{-2|x|}$, calcolare, approssimando alla terza cifra decimale, $P(\{X \leq 3\})$. [circa $0,998$]

5. Un individuo $\mathcal{I}$ al tempo $t = 0$ possiede un patrimonio P di 50000 euro, e ha 2 possibilità di investimento:

- **investire tutto in ZCB privi di rischio di prezzo 100 (al tempo iniziale) che assicurano un rendimento annuo i (posizione X);**
- **investire metà nei ZCB privi di rischio e l'altra metà in ZCB rischiosi che dopo un anno valgono $A = 110$ con probabilità $0,4$ oppure $A = 95$ con probabilità $0,6$ (posizione Y).**

Calcolare il tasso di rendimento minimo i^* dei ZCB non rischiosi affinchè il payoff atteso di $G = X - Y$ sia positivo. [$i^* = 1\%$]

6. Un individuo $\mathcal{I}$ al tempo $t = 0$ possiede un patrimonio P di 8000 euro, e ha 2 possibilità di investimento:

- **investire tutto in ZCB privi di rischio di prezzo 100 (al tempo iniziale) che assicurano un rendimento annuo $i = 0,019$ (posizione X);**
- **investire una parte q del patrimonio nei ZCB privi di rischio e l'altra metà in ZCB rischiosi che dopo un anno valgono $A = 108$ con probabilità $0,5$ oppure $A = 96$ con probabilità $0,5$ (posizione Y).**

Calcolare la quota minima q^* del patrimonio da investire nei ZCB non rischiosi nella posizione Y affinchè il payoff atteso di $G = X - Y$ sia maggiore o uguale a 0. [$q^* = 8000$]

Capitolo 3

Elementi di teoria delle preferenze

Le **preferenze** rappresentano un concetto di grande importanza in Economia, e la loro formalizzazione matematica è fondamentale. In particolare, bisognerà ricordare la nozione di *relazione d'ordine*, e le sue proprietà algebriche.

Cominciamo a dare una prima Definizione dell'insieme che contiene le possibili posizioni da confrontare.

Definizione 34. *L'insieme $\mathcal{X}$ che contiene tutte le possibili posizioni patrimoniali raggiungibili dall'individuo I al tempo t, è detto* ***insieme delle opportunità***[1].

Naturalmente, anche la posizione patrimoniale di partenza è un'opportunità: $X \in \mathcal{X}$.

Nell'insieme delle opportunità, va definito un *criterio di preferenza*, necessario per stabilire, nella scelta tra due qualsiasi strategie o posizioni finanziarie, quale sia da preferire. Essenzialmente, ci vuole quello che in Algebra si chiama una **relazione d'ordine**, o un **ordinamento**. Il punto di partenza è la definizione di una cosiddetta *preferenza debole*, che è indicata con un simbolo simile al 'maggiore o uguale'. Dati due qualsiasi elementi $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$:

$$X_1 \succeq X_2 \qquad \text{significa che } X_1 \text{ o è da preferire o è equivalente a } X_2.$$

In altre parole, la posizione X_1 è debolmente preferita a X_2 oppure X_1 è gradita, o favorevole, almeno quanto X_2. Immediatamente e conseguentemente, possiamo definire una *preferenza stretta*, questa volta analoga al 'maggiore' o 'maggiore stretto', nel modo seguente. Date due qualsiasi posizioni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$:

$$X_1 \succ X_2 \qquad \text{se } X_1 \succeq X_2 \text{ ma invece non vale } X_2 \succeq X_1.$$

[1]Nella trattazione, comunque, è preferibile usare la parola 'posizione', finanziaria o patrimoniale che sia, rispetto alla parola 'opportunità'.

Questa impostazione definisce implicitamente una *relazione di indifferenza* tra le posizioni X_1 e X_2:

$$X_1 \sim X_2 \qquad \text{se} \qquad X_1 \succeq X_2 \quad \text{e anche} \quad X_2 \succeq X_1.$$

La scrittura $X_1 \sim X_2$ stabilisce che X_1 e X_2 sono tra loro indifferenti.

Qui di seguito, richiamiamo le proprietà algebriche della relazione d'ordine e della relazione di indifferenza.

Proprietà della relazione d'ordine debole $\succeq$

1. *Riflessività*: per ogni $X \in \mathcal{X}$, si ha che $X \succeq X$.
2. *Transitività*: per ogni $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$, si ha che

$$X_1 \succeq X_2 \quad \text{e} \quad X_2 \succeq X_3 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 \succeq X_3.$$

3. *Completezza*: per ogni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, si ha:

$$\text{o} \quad X_1 \succeq X_2 \quad \text{oppure} \quad X_2 \succeq X_1.$$

La terza proprietà ha una grande importanza, in quanto stabilisce che tutte le posizioni sono tra loro confrontabili. La relazione d'ordine stretto più nota è quella tra i numeri reali, sulla retta $\mathbb{R}$.

Invece, la relazione di indifferenza possiede le classiche proprietà di una relazione di equivalenza (la completezza è sostituita dalla simmetria).

Proprietà della relazione di indifferenza $\sim$

1. *Riflessività*: per ogni $X \in \mathcal{X}$, si ha che $X \sim X$.
2. *Transitività*: per ogni $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$, si ha che

$$X_1 \sim X_2 \quad \text{e} \quad X_2 \sim X_3 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 \sim X_3.$$

3. *Simmetria*: per ogni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, si ha che se $X_1 \sim X_2$, anche $X_2 \sim X_1$.

Esempi interessanti di relazioni di equivalenza provengono da altri ambiti della Matematica, ad esempio data una certa retta r nello spazio tridimensionale, tutte le rette ad essa parallele sono in relazione di equivalenza con lei, e così anche la similitudine tra triangoli è una relazione di equivalenza. Invece, relazioni d'ordine un pò più complesse provengono dal Calcolo della Probabilità, e servono a ordinare le variabili aleatorie.

3.1 Dominanza stocastica del I e del II ordine

Una prima relazione d'ordine sulle v.a. continue è la cosiddetta **dominanza stocastica del I ordine**. Consideriamo 2 v.a. continue X ed Y, le cui rispettive funzioni di ripartizione sono F_X ed F_Y, e le cui rispettive distribuzioni di probabilità sono f_X e f_Y. Quindi avremo, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$P(\{X \leq t\}) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds,$$

$$P(\{Y \leq t\}) = F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(s)ds.$$

Di conseguenza, mettendo a confronto le due variabili, possiamo stabilire che X sia preferibile ad Y quando sia più alta la probabilità che X prenda valori maggiori o uguali a una certa soglia rispetto a Y. In forma di Definizione formale:

Definizione 35. *Date 2 v.a. continue X e Y, aventi rispettivamente $F_X(t)$ e $f_X(t)$ e $F_Y(t)$ e $f_Y(t)$ come funzioni di ripartizione e densità di probabilità, diciamo che X **domina stocasticamente** Y **al I ordine** se:*

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ P(\{X > t\}) \geq P(\{Y > t\}).$$

Se X domina Y, X si preferisce a Y. Inoltre, quest'ultima condizione si può scrivere in termini di funzioni di ripartizione, vale a dire:

$$P(\{X > t\}) \geq P(\{Y > t\}) \iff 1 - F_X(t) \geq 1 - F_Y(t) \iff$$

$$\iff 1 - \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds \geq 1 - \int_{-\infty}^{t} f_Y(s)ds \iff \int_{-\infty}^{t} f_Y(s)ds \geq \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds,$$

quindi

$$X \text{ si preferisce a } Y \quad \text{se} \quad \forall\ t \in \mathbb{R},\ F_Y(t) \geq F_X(t).$$

Di seguito, un semplice caso di dominanza stocastica del I ordine.

Esempio 36. *Supponiamo di avere 2 v.a. continue X e Y, con due differenti densità: la X è distribuita uniformemente su $(0,1)$, vale a dire ha le seguenti p.d.f. e funzione di ripartizione:*

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & \textit{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \implies F_X(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \in (-\infty, 0] \\ t & \textit{se } t \in (0,1) \\ 1 & \textit{se } t \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Anche la v.a. Y è distribuita uniformemente, ma su un intervallo diverso. In particolare, ha le seguenti p.d.f. e funzione di ripartizione:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 2 & se\ t \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \\ 0 & altrimenti \end{cases} \implies F_Y(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \in (-\infty, 0] \\ 2t & se\ t \in (0, 1/2) \\ 1 & se\ t \in [1/2, +\infty) \end{cases} .$$

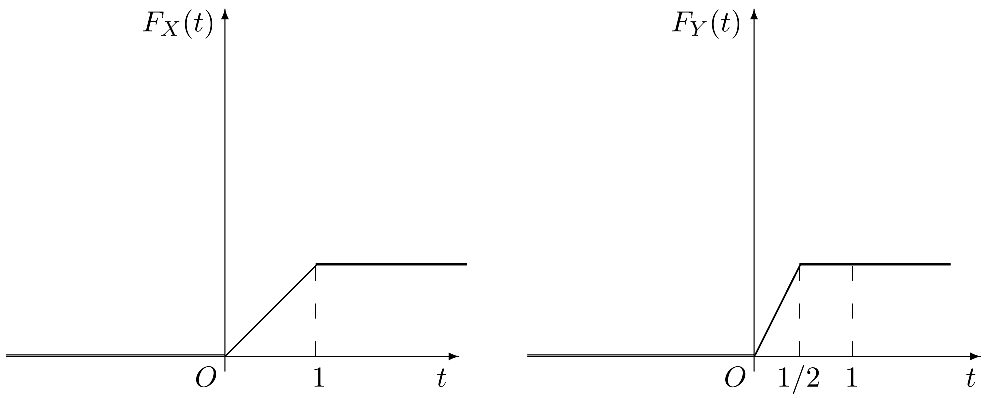

Figura 2. *I grafici delle funzioni di ripartizione $F_X(t)$ and $F_Y(t)$*

Risulta abbastanza evidente che sul semiasse $(-\infty, 0]$ $F_X(t) = F_Y(t)$, mentre $F_Y(t) > F_X(t)$ su $(0, 1)$, dopodichè $F_Y(t) = F_X(t)$ su $[1, +\infty]$, di conseguenza, coerentemente con la Definizione, X domina stocasticamente Y e quindi X va preferito a Y.

Esiste poi un'ulteriore forma di dominanza stocastica, che è la **dominanza stocastica del II ordine**. Viene utilizzata se la dominanza del I ordine non fornisce un ordine di preferenza tra le variabili, e si può esprimere in due diversi modi, equivalenti, che presentiamo nella seguente Definizione.

Definizione 37. *Date due v.a. continue X e Y, aventi rispettivamente $F_X(t)$ e $f_X(t)$ e $F_Y(t)$ e $f_Y(t)$ come funzioni di ripartizione e densità di probabilità, diciamo che X* ***domina stocasticasticamente*** *Y* ***al II ordine*** *se una delle seguenti condizioni è verificata:*

- $$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{t} [F_Y(s) - F_X(s)] ds \geq 0,$$
- *data una qualsiasi funzione di utilità $U(\cdot)$ non-decrescente e concava,*
$$\mathbb{E}[U(X)] \geq \mathbb{E}[U(Y)].$$

La prima delle due condizioni della Definizione 37 si riferisce all'ampiezza dell'area sottostante alle funzioni di ripartizione delle 2 variabili, prendendo qualsiasi livello t, e fondamentalmente significa che X si preferisce a Y se l'area sottostante a F_X è minore di quella sottostante a F_Y, per qualsiasi valore. Tornando all'Esempio 36, X domina stocasticamente Y sia al I che al II ordine, perchè l'area sottesa a F_Y è maggiore all'area sottesa a F_X.

La seconda condizione, ha invece a che fare con l'*utilità attesa*, perchè stiamo usando l'operatore di media, o valore atteso, $\mathbb{E}[\cdot]$ non sulla v.a., ma sull'utilità che essa produce. Ci torneremo più avanti, ma per ora abbiamo fissato un principio naturale e coerente con la razionalità economica: *tra 2 esiti aleatori, quello la cui utilità attesa è maggiore è da preferirsi.*

3.2 L'operatore di ordinamento

Possiamo rappresentare le preferenze di un individuo $\mathcal{I}$ esprimendo la relazione tra le opportunità con un cosiddetto *operatore di ordinamento*, che sia associato in modo naturale alla preferenza $\succeq$.

Definizione 38. *Un **operatore di ordinamento** è una funzione H definita sull'insieme delle opportunità $\mathcal{X}$ e a valori reali, cioè che associa ad ogni $X \in \mathcal{X}$ un numero $H(X) \in \mathbb{R}$, con le seguenti proprietà:*

- $$H(X_2) > H(X_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_2 \succ X_1.$$
- $$H(X_2) = H(X_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_2 \sim X_1.$$

In un certo senso, H associa ad ogni posizione il suo 'punteggio', o *score*, che esprime la convenienza, o il gradimento, da parte dell'individuo $\mathcal{I}$. Quindi l'ordinamento sull'insieme delle opportunità $\mathcal{X}$ risulta esattamente associato alla relazione d'ordine naturale tra i numeri reali.

Una dicitura alternativa per l'operatore di ordinamento $H(\cdot)$ è quella di *funzione di utilità ordinale*. Di seguito, elenchiamo alcune possibili proprietà che $H(\cdot)$ può possedere.

Definizione 39. *Dato un operatore di ordinamento $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, si dice che H è **omogeneo di grado** k se, per ogni posizione $X \in \mathcal{X}$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $aX \in \mathcal{X}$, si ha:*

$$H(aX) = a^k H(X).$$

La Definizione 39 chiaramente ricorda quella di omogeneità di grado k delle normali funzioni, con la differenza data dal fatto che se X è una posizione dello spazio delle opportunità, non necessariamente anche aX lo è, o quantomeno non è detto che lo sia per tutti gli $a \in \mathbb{R}$, e quindi la Definizione può risultare 'ristretta'. Alcuni noti operatori del Calcolo delle Probabilità sono omogenei.

Esempio 40. *Data una v.a. X discreta, il suo valore atteso $\mathbb{E}[X]$ è omogeneo di grado 1. Infatti, descrivendo X e aX, per $a \in \mathbb{R}$, si ha:*

$$X = \begin{cases} x_1 & \textit{con probabilità } \ p_1 \\ x_2 & \textit{con probabilità } \ p_2 \\ \vdots & \\ x_N & \textit{con probabilità } \ p_N \end{cases}, \qquad aX = \begin{cases} ax_1 & \textit{con probabilità } \ p_1 \\ ax_2 & \textit{con probabilità } \ p_2 \\ \vdots & \\ ax_N & \textit{con probabilità } \ p_N \end{cases},$$

evidentemente con $p_1 + \cdots + p_N = 1$, avremo le medie:

$$\mathbb{E}[X] = x_1p_1 + \ldots + x_Np_N, \qquad \mathbb{E}[aX] = ax_1p_1 + \cdots + ax_Np_N,$$

da cui banalmente $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$, quindi l'omogeneità sussiste ed è di grado 1.

Esempio 41. *Data una v.a. X discreta, la sua varianza $Var(X)$ è omogenea di grado 2. Infatti, descrivendo X e aX come nell'Esempio precedente, avremo:*

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = x_1^2p_1 + \cdots + x_N^2p_N - (x_1p_1 + \cdots + x_Np_N)^2,$$

$$Var(aX) = \mathbb{E}[(aX)^2] - (\mathbb{E}[aX])^2 =$$
$$= a^2x_1^2p_1 + \cdots + a^2x_N^2p_N - (ax_1p_1 + \cdots + ax_Np_N)^2,$$

quindi

$$Var(aX) = a^2\left(x_1^2p_1 + \cdots + x_N^2p_N\right) - a^2(x_1p_1 + \cdots + x_Np_N)^2 =$$

$$= a^2\left[\left(x_1^2p_1 + \cdots + x_N^2p_N\right) - (x_1p_1 + \cdots + x_Np_N)^2\right] = a^2\left[\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2\right],$$

da cui $Var(aX) = a^2Var(X)$, quindi il grado di omogeneità della varianza è 2.

Definizione 42. *Dato un operatore di ordinamento $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, e date due posizioni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, tali che la somma sia ancora una posizione ammissibile, cioè $X_1 + X_2 \in \mathcal{X}$, si dice che H è*

- ***additivo** se $H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2)$;*
- ***subadditivo** se $H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$;*

- ***superadditivo*** *se* $H(X_1 + X_2) \geq H(X_1) + H(X_2)$.

Ad esempio, è noto che l'operatore valore atteso è additivo, se i valori attesi delle v.a. sono finiti:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2].$$

Invece la varianza è additiva solo se la covarianza è nulla, cioè se X_1 e X_2 sono non-correlate, vale $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$.

Definizione 43. *Dato un operatore di ordinamento $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, per ogni coppia di posizioni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, e per ogni coppia di costanti α_1 e α_2 tali che la relativa combinazione lineare sia ancora una posizione ammissibile, cioè $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in \mathcal{X}$, si dice che H è* ***lineare*** *se*

$$H(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 H(X_1) + \alpha_2 H(X_2).$$

Si può dire che la linearità sia l'unione di due diverse proprietà: additività e omogeneità di grado 1. Di conseguenza, l'operatore valore atteso $\mathbb{E}[\cdot]$ è lineare, in quanto soddisfa entrambe le proprietà.

3.3 L'equivalente certo

L'insieme $\mathcal{X}$ non necessariamente contiene soltanto posizioni aleatorie, intese come descritte da variabili aleatorie. Tra le opportunità possono esserci anche *importi certi*, cioè esenti da ogni forma di incertezza. Per evitare confusione nella notazione, li denoteremo con x minuscola, e in tal caso l'operatore di ordinamento sarà semplicemente una funzione reale di x, che chiameremo $h(x)$.

Consideriamo la classica ipotesi di razionalità economica degli agenti, che presuppone che essi puntino sempre a massimizzare i loro profitti. Questo induce una preferenza 'naturale' su $h(\cdot)$, come fosse una funzione utilità o payoff. Molto semplicemente, dati due importi certi x_1 e x_2 nell'insieme $\mathcal{X}$, si ha:

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad h(x_2) > h(x_1),$$

in altre parole, $h(\cdot)$ dovrà essere strettamente crescente. Inoltre, possiamo assumere che essa sia almeno continua, mentre per le principali applicazioni la derivabilità non è necessaria.

Un concetto di grande importanza si può introdurre nel modo seguente. Per ogni posizione aleatoria $X \in \mathcal{X}$ è sempre possibile individuare un valore certo x^* che sia equivalente a X, ossia $x^* \sim X$. L'equivalenza si basa sul fatto che i 'punteggi' forniti da entrambe le posizioni siano uguali, cioè:

$$h(x^*) = H(X).$$

Ma se ricordiamo le ipotesi di cui sopra sulla funzione $h(\cdot)$, essa è crescente e continua, e quindi, come sappiamo dall'Analisi Matematica di base, anche invertibile. Inoltre, dovendo essere a valori positivi, continua e strettamente crescente, assumendo che il suo codominio sia l'intero semiasse positivo, uno dei valori che prenderà sarà uguale al valore preso da $H(X)$, anch'esso positivo. A questo punto, per definire in modo univoco x^*, ci basterà invertire la funzione h:

$$x^* = h^{-1}(H(X)). \tag{3.3.1}$$

Quindi, l'importo x^* indica la situazione patrimoniale che l'individuo $\mathcal{I}$ valuta come equivalente alla posizione incerta X. Lo definiamo l'**equivalente certo di X per $\mathcal{I}$**.

Avendo a disposizione la forma funzionale dell'utilità e ovviamente tutte le caratteristiche della situazione finanziaria, l'equivalente certo x^* è calcolabile, come nel seguente Esempio.

Esempio 44. *Consideriamo una v.a. discreta X che indica il guadagno a fine anno di un individuo $\mathcal{I}$, i cui possibili esiti sono i seguenti 3:*

$$X = \begin{cases} x_1 = 1000 \text{ euro} & \text{con probabilità } p_1 = 1/3 \\ x_2 = 600 \text{ euro} & \text{con probabilità } p_2 = 1/2 \\ x_3 = 0 \text{ euro} & \text{con probabilità } p_3 = 1/6 \end{cases},$$

e la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ è data da $h(x) = \ln(1 + x)$. Preliminarmente, calcoliamo l'utilità attesa di X, quindi

$$\mathbb{E}[H(X)] = \ln(1 + 1000) \cdot \frac{1}{3} + \ln(1 + 600) \cdot \frac{1}{2} + \ln(1 + 0) \cdot \frac{1}{6} = 5,502.$$

Non usiamo unità di misura per questa quantità, sempre considerandola una sorta di 'score atteso'. Ora, applichiamo la Definizione di equivalente certo per calcolarlo esplicitamente:

$$h(x^*) = 5,502 \quad \Longrightarrow \quad \ln(1 + x^*) = 5,502 \quad \Longrightarrow \quad x^* = e^{5,502} - 1 = 244,181.$$

Quindi il possesso certo di 244,181 euro è considerato dall'individuo $\mathcal{I}$ equivalente al guadagno incerto descritto dalla v.a. X, con questa struttura di utilità data.

Nel prossimo Esempio, consideriamo uno scenario di 'lotteria', basato sui lanci successivi di un dado a 6 facce. Vedremo anche cosa comporta praticamente usare un operatore di ordinamento anzichè un altro.

Esempio 45. *L'individuo $\mathcal{I}$ può scegliere se partecipare a una lotteria, intesa come una successione di scommesse, basate sui lanci successivi di un dado regolare a 6 facce (per regolare si intende non truccato, vale a dire in cui ogni esito è equiprobabile ed ha probabilità costante $1/6$).*

Se $\mathcal{I}$ non partecipa alla lotteria, mantiene il suo capitale iniziale $C = 100$ euro. Altrimenti, ad ogni lancio guadagna del denaro aggiuntivo se esce un numero compreso tra 4 e 6 (Vittoria), e perde invece del denaro se l'esito è un numero che sta tra 1 e 3 (Sconfitta). Nella seguente tabella descriviamo le quattro diverse posizioni. La prima, C, corrisponde all'astensione dal gioco. Invece, X_1, X_2 e X_3 corrispondono alla partecipazione alle 3 estrazioni.

Posizione	*Vittoria*	*Sconfitta*	*Totale (con vittoria)*	*Totale (con sconfitta)*
C	0	0	100	100
X_1	30	-20	130	80
X_2	40	-60	140	40
X_3	20	-30	120	70

Consideriamo diversi operatori di ordinamento e analizziamone l'effetto. Ad esempio, consideriamo inizialmente il valore atteso, quindi

$$H(C) = 100, \qquad H(X_K) = \mathbb{E}[X_k].$$

Banalmente, il valore atteso di una costante è la costante stessa, in questo caso la quantità certa 100, corrispondente a C. Poichè le probabilità di Vittoria e Sconfitta sono sempre uguali ad ogni lancio, $1/2$ e $1/2$ in quanto entrambe corrispondono a 3 esiti favorevoli sui 6 casi possibili, le medie sono aritmetiche. Avremo:

$$H(X_1) = \mathbb{E}[X_1] = \frac{130 + 80}{2} = 105 \quad \textit{euro}.$$

$$H(X_2) = \mathbb{E}[X_2] = \frac{140 + 40}{2} = 90 \quad \textit{euro}.$$

$$H(X_3) = \mathbb{E}[X_3] = \frac{120 + 70}{2} = 95 \quad \textit{euro}.$$

Quindi, poichè l'ordine tra gli score delle varie posizioni è:

$$H(X_1) \ > \ H(C) \ > \ H(X_3) \ > \ H(X_2),$$

di conseguenza l'ordine indotto sulla preferenza di $\mathcal{I}$ sarà:

$$X_1 \quad \succ \quad C \quad \succ \quad X_3 \quad \succ \quad X_2.$$

Consideriamo ora un diverso operatore di ordinamento, ad esempio la varianza, quindi:

$$H(C) = Var(C) = 0, \qquad H(X_K) = Var(X_k),$$

perchè ovviamente la varianza di una costante è 0. *Calcoliamo gli score delle altre posizioni, sfruttando la formula semplificata per la varianza:*

$$H(X_1) = Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = \frac{130^2 + 80^2}{2} - \left(\frac{130 + 80}{2}\right)^2 = 625 \ \ euro.$$

$$H(X_2) = Var(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_2])^2 = \frac{140^2 + 40^2}{2} - \left(\frac{140 + 40}{2}\right)^2 = 2500 \ \ euro.$$

$$H(X_3) = Var(X_3) = \mathbb{E}[X_3^2] - (\mathbb{E}[X_3])^2 = \frac{120^2 + 70^2}{2} - \left(\frac{120 + 70}{2}\right)^2 = 625 \ \ euro.$$

Ora, se seguissimo l'ordinamento dell'operatore valore atteso, in assoluto la posizione preferita sarebbe X_2, che ha varianza nettamente più alta. Ma se la varianza rappresentasse l'utilità, la posizione certa C avrebbe utilità 0, *e non avrebbe senso. Quindi potremmo ragionare in modo opposto, e preferire la posizione con varianza minore, ossia con minore scostamento quadratico dalla media e quindi con minore 'rischio'. In ogni modo, la varianza non è adeguata a costruire un operatore di ordinamento in base al quale rimanga indotta una preferenza.*

Molto meglio, l'operatore 'differenza tra valore atteso e deviazione standard', vale a dire:

$$H(X) = \mathbb{E}[X] - \sqrt{Var(X)},$$

i cui valori sono:

$$H(C) = 100, \qquad H(X_1) = 80, \qquad H(X_2) = 40, \qquad H(X_3) = 70.$$

Quindi, l'ordinamento sarà:

$$H(C) \ > \ H(X_1) \ > \ H(X_3) \ > \ H(X_2),$$

da cui, quello indotto sulla preferenza di $\mathcal{I}$:

$$C \quad \succ \quad X_1 \quad \succ \quad X_3 \quad \succ \quad X_2.$$

3.4 Criteri di preferenza e rischio

Come nell'ultimo Esempio, il valore atteso può essere scelto come operatore di ordinamento per generare una preferenza nell'insieme delle opportunità $\mathcal{X}$. Questo è l'approccio più diretto e intuitivo, calcolabile anche senza strumenti matematici raffinati.

Se $H(X) = \mathbb{E}[X]$, e si sceglie l'ordine di preferenza sui numeri reali indotto dal valore atteso, si sta scegliendo il cosiddetto **Criterio del Valore Atteso**.

In questo caso, una posizione certa x ha come media se stessa, quindi

$$h(x) = x, \qquad h^{-1}(y) = y$$

e l'equivalente certo è ancora x. Tornando poi al Capitolo precedente, in cui avevamo denotato con G la v.a. 'guadagno', il criterio diventa quello del **Guadagno Atteso**, anche perchè per la linearità del valore atteso, si ha:

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[Y - X] = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X],$$

e questo fornisce un'immediata valutazione della posizione. Banalmente, la scelta di passare dalla posizione X alla posizione Y sarà:

- **favorevole** se $\mathbb{E}[G] > 0 \iff \mathbb{E}[Y] > \mathbb{E}[X]$;
- **equa** se $\mathbb{E}[G] = 0 \iff \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$;
- **sfavorevole** se $\mathbb{E}[G] < 0 \iff \mathbb{E}[Y] < \mathbb{E}[X]$.

Quindi il problema da risolvere per l'individuo $\mathcal{I}$ consisterà nella massimizzazione del guadagno atteso $\mathbb{E}[G]$.

Va notato come il concetto di *equità* di un'operazione finanziaria è già noto dalla Matematica Finanziaria di base, in cui non ci sono elementi di incertezza. In particolare, un'operazione finanziaria si dice equa quando ha valore attuale 0. Quindi, qui si aggiunge la casualità considerando anche il valore atteso della posizione.

In ogni caso, un criterio basato soltanto sul valore atteso, o guadagno atteso, è troppo rozzo e impreciso per descrivere le preferenze degli agenti. Considerando una qualsiasi posizione $X \in \mathcal{X}$, possiamo decomporla come segue:

$$X = \mathbb{E}[X] + (X - \mathbb{E}[X]),$$

cioè come una somma tra il proprio valore atteso, detta anche *componente anticipata*, e lo scarto tra se stessa e il suo valore atteso, *componente non anticipata*. La prima componente è quella su cui si concentra l'attenzione del

Criterio del Valore Atteso, ma questo criterio non tiene in conto la seconda, quella non anticipata, che racchiude l'incertezza, e quindi anche il **rischio**. Tornando brevemente all'Esempio 44, notiamo che il valore atteso della v.a. X è dato da $\mathbb{E}[X] = 633,\overline{3}$ euro. Quindi la componente non anticipata vale:

$$X - \mathbb{E}[X] = \begin{cases} y_1 = 366,\overline{6} \text{ euro} & \text{con probabilità } \; p_1 = 1/3 \\ y_2 = -33,\overline{3} \text{ euro} & \text{con probabilità } \; p_2 = 1/2 \\ y_3 = -633,\overline{3} \text{ euro} & \text{con probabilità } \; p_3 = 1/6 \end{cases} .$$

In sintesi, un criterio più raffinato e più preciso di quello del Valore Atteso dovrà tenere in conto anche la componente rischiosa. Di qui una considerazione fondamentale: **se il rendimento atteso va chiaramente massimizzato, il rischio atteso deve invece essere...minimizzato!**

Può essere interessante, per illustrare l'insufficienza del semplice Criterio del Valore Atteso, un classico paradosso, che fu esposto nel 1738 dal matematico Daniel Bernoulli, il *Paradosso di San Pietroburgo* anche detto, in modo fortemente descrittivo, la *rovina del giocatore*. Questo gioco illustra l'imperfezione del suddetto criterio, perchè all'epoca non era stata ancora data una rigorosa struttura alla Teoria della Probabilità, e di conseguenza il 'prezzo' per partecipare a un gioco corrispondeva al valore atteso della vincita al gioco stesso. Come se oggi, in un certo senso, puntare 1 euro sull'uscita di un numero su 90 volesse dire aver diritto a una vincita di 90 euro (chiaramente impossibile per i costi di gestione del gioco, il compenso per le persone che ci lavorano, eccetera).

Esempio 46. *Consideriamo il seguente gioco G: un individuo gioca a 'Testa o Croce', con una moneta regolare, vale a dire a un gioco che ha $1/2$ di probabilità di vittoria e $1/2$ di probabilità di perdita ad ogni prova. Supponiamo che ad ogni tentativo, qualora il precedente tentativo sia stato fallimentare, si vinca sempre il doppio della possibile vincita precedente. In pratica:*

- *al primo tentativo si vincono 2 euro;*
- *se al primo tentativo si è perso, al secondo lancio di moneta si vincono 4 euro;*
- *se al secondo tentativo si è perso, al terzo lancio di moneta si vincono 8 euro;*

e così via. In pratica il gioco si interrompe alla prima vittoria del giocatore. Ora, qual è il prezzo equo del biglietto per partecipare al gioco? Se esso deve coincidere con il valore atteso della lotteria G, ricordando che le prove sono tutte *indipendenti tra loro, la probabilità che la vittoria arrivi alla k-esima prova è data da* $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. *Ma allora il valore atteso risulterà uguale alla seguente sommatoria:*

$$\mathbb{E}[G] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = +\infty.$$

In altre parole, tendendo a $+\infty$ *il numero delle prove distinte, il valore atteso, e quindi il costo del biglietto, deve essere infinito.*

Quindi, come in ogni paradosso, ci troviamo davanti a un'incosistenza logica. E fu qui Bernoulli ebbe una grande intuizione: invece di considerare esattamente il valore monetario della vincita, poteva avere più senso considerare un altro valore: l'utilità, o il beneficio, che il giocatore avrebbe assegnato alla vincita.

Questo beneficio doveva avere delle caratteristiche simili a quelle di una delle nostre funzioni di utilità (positivo, crescente nel numero delle prove, e così via). Usando una scala logaritmica, riferendoci alla k*-esima prova, Bernoulli propose la quantità* $\log(2^k)$ *anzichè l'importo della vincita* 2^k. *Quindi la sommatoria di cui sopra divenne:*

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(2^k)}{2^k} = \log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Questa sommatoria è invece convergente, infatti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

e ora, uguagliando membro a membro e ricordando il valore della serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k = 1$, *si ha:*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 1 + 1 = 2,$$

da cui il valore atteso del gioco G *con utilità logaritmica diventa* $\mathbb{E}[G] = 2\log 2$.

Tornando alla trattazione del rischio, la nostra attenzione ora si sposterà sull'identificazione di un operatore di ordinamento $H(\cdot)$ che tenga in conto anche la componente rischiosa.

Bisogna caratterizzare l'atteggiamento degli agenti nei confronti del rischio, per l'esattezza della loro *propensione verso il rischio*.

Definizione 47. *Dato un operatore di ordinamento $H(\cdot)$, l'individuo $\mathcal{I}$ si dice* ***avverso al rischio*** *se per ogni v.a. $X \in \mathcal{X}$ vale:*

$$H(X) < h(\mathbb{E}[X]).$$

In pratica, un individuo avverso al rischio assegna alla posizione rischiosa X un valore minore di quello che assegna alla corrispondente posizione certa $\mathbb{E}[X]$. La Definizione 47 si può estendere: un individuo $\mathcal{I}$ risulta **propenso al rischio** se per ogni v.a. $X \in \mathcal{X}$ vale $H(X) > h(\mathbb{E}[X])$, e infine si dice **indifferente al rischio** (in Inglese, **risk-neutral**) se $H(X) = h(\mathbb{E}[X])$.

Va notato che se l'operatore di ordinamento scelto è il valore atteso, cioè $H(X) = \mathbb{E}[X]$, quindi come $h(x) = x$, di conseguenza

$$H(X) = h(\mathbb{E}[X]),$$

e in quel caso $\mathcal{I}$ è indifferente al rischio.

Consideriamo ora la funzione $h(x) = H(X)$, che come sappiamo, ammette un'inversa crescente. In caso di avversità dell'agente al rischio, si ha che

$$\begin{cases} x^* = h^{-1}(H(X)) \\ H(X) < h(\mathbb{E}[X]) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad h^{-1}(H(X)) < h^{-1}(h(\mathbb{E}[X])) = \mathbb{E}[X]$$

da cui $x^* < \mathbb{E}[X]$. In particolare la differenza $\lambda(X) = \mathbb{E}[X] - x^*$ tra le due quantità può essere denominata **premio al rischio di indifferenza** o **premio di indifferenza**, praticamente la quantità da togliere dalla posizione certa $\mathbb{E}[X]$ per renderla indifferente[2] alla posizione rischiosa X. Inoltre, $\lambda(X)$ è già una sorta di *misura di rischiosità*: dati 2 diversi individui, con 2 diversi operatori di ordinamento, quello che avrà un $\lambda(X)$ maggiore sarà più avverso al rischio.

Una modalità molto usata per descrivere, e misurare l'avversione al rischio, consiste nell'introdurre una funzione di utilità adeguata, che si possa legare intuitivamente all'operatore di ordinamento. Il prossimo Capitolo è dedicato proprio alla transizione verso la Teoria dell'Utilità.

3.5 Esercizi proposti

1. Dato un operatore di ordinamento $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, date le 2 posizioni X_1 e X_2 tali che $H(X_1) > H(X_2)$, dimostrare che se H è lineare, allora vale il seguente ordinamento di preferenza:

$$X_1 \succ \frac{X_1 + X_2}{2} \succ X_2.$$

[2] In termini assicurativi, inoltre, $\lambda(X)$ è il **caricamento massimo** che l'individuo assicurato $\mathcal{I}$ è disposto a pagare affinchè nella sua polizza l'incertezza della sua posizione X sia eliminata.

[Suggerimento: applicare la linearità a $H(X_1+X_2)$, imporre la disuguaglianza data, sia in un verso che nell'altro, infine dedurre l'ordine tra le posizioni.]

2. Consideriamo la seguente v.a. discreta X che indica il guadagno a fine anno di un individuo $\mathcal{I}$:

$$X = \begin{cases} x_1 = 100 \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_1 = 2/7 \\ x_2 = 300 \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_2 = 4/7 \\ x_3 = 500 \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_3 = 1/7 \end{cases},$$

e la cui funzione di utilità è data da $u(x) = \sqrt{x^2+1}$. Determinare l'equivalente certo x^*. $[x^* = 271,479]$

3. Consideriamo la seguente v.a. discreta X che indica il guadagno a fine anno di un individuo $\mathcal{I}$:

$$X = \begin{cases} x_1 = 1000 \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_1 = 2/9 \\ x_2 = \alpha \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_2 = 1/3 \\ x_3 = 6000 \textbf{ euro} & \textbf{con probabilità } p_3 = 4/9 \end{cases},$$

e la cui funzione di utilità è data da $u(x) = \sqrt{x}+1$. Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che l'equivalente certo x^* sia uguale a 5000 euro.
$[\alpha = 7704,632]$

4. L'individuo $\mathcal{I}$ può scegliere se partecipare a una lotteria basata su 2 lanci successivi di un dado. Se $\mathcal{I}$ non partecipa alla lotteria, mantiene il suo capitale iniziale $C = 1000$ euro. Altrimenti, ad ogni lancio vince se esce un numero compreso tra 5 e 6 (Vittoria), e perde invece del denaro se esce tra 1 e 4 (Sconfitta). Le posizioni C, X_1 e X_2 sono descritte nella tabella seguente.

Posizione	Vittoria	Sconfitta	Totale (con vittoria)	Totale (con sconfitta)
C	0	0	1000	1000
X_1	650	-300	1650	700
X_2	700	-700	1700	300

Dato l'operatore di ordinamento 'media' $H(X) = \mathbb{E}[X]$, stabilire l'ordinamento di preferenza tra le posizioni. $[X_1 \succ C \succ X_2]$

5. L'individuo $\mathcal{I}$ può scegliere se giocare o meno alla roulette (sul rosso, quindi con probabilità di vittoria $18/37$, oppure sullo 0, probabilità di vittoria $1/37$). Se $\mathcal{I}$ non gioca, mantiene il suo capitale iniziale $C = 5000$ euro. Altrimenti, al primo lancio vince (se esce il Rosso) oppure perde 500 euro, e al secondo lancio vince α euro se esce lo 0, altrimenti perde 4500 euro. Le posizioni C, X_1 e X_2 sono descritte nella tabella seguente.

Posizione	**Vittoria**	**Sconfitta**	**Totale (con vittoria)**	**Totale (con sconfitta)**
C	0	0	5000	5000
X_1	500	-500	5500	4500
X_2	α	-4500	$5000+\alpha$	500

Dato l'operatore di ordinamento 'media' $H(X) = \mathbb{E}[X]$, stabilire il valore minimo di α affinchè X_2 sia la posizione preferita. $[\alpha = 162000]$

6. L'individuo $\mathcal{I}$ può scegliere se partecipare a una lotteria basata su 2 lanci successivi di una moneta da 1 euro con la testa di Wolfgang Amadeus Mozart su un lato. Se $\mathcal{I}$ non partecipa alla lotteria, mantiene il suo capitale iniziale di $C = 3000$ euro. Altrimenti, ad ogni lancio vince se esce la testa di Mozart e perde invece del denaro se esce l'altra faccia. Le posizioni C, X_1 e X_2 sono descritte nella tabella seguente.

Posizione	**Vittoria**	**Sconfitta**	**Totale (con vittoria)**	**Totale (con sconfitta)**
C	0	0	3000	3000
X_1	1200	-1100	4200	1900
X_2	1600	-1500	4600	1500

Dato l'operatore di ordinamento

$$H(X) = \mathbb{E}[X] - \sqrt{\mathbf{Var}(X)},$$

stabilire l'ordinamento di preferenza tra le posizioni. $[C \succ X_1 \succ X_2]$

Capitolo 4

La Teoria dell'Utilità

4.1 La mistura e le sue proprietà

Tornando alle proprietà delle relazioni d'ordine e di equivalenza esposte nel Capitolo 3, dobbiamo definire un concetto fondamentale che riguarda le posizioni finanziarie dell'insieme delle opportunità $\mathcal{X}$, la cosiddetta *posizione finanziaria composta* o *mistura*.

Definizione 48. *Date $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, e un numero reale $\alpha \in [0,1]$, si chiama* ***mistura*** *$X_1 \alpha X_2$ la v.a. che assume i valori di X_1 con probabilità α e di X_2 con probabilità $1-\alpha$.*

Esempio 49. *Consideriamo le due seguenti v.a. X_1 e X_2 e costruiamo una mistura:*

$$X_1 = \begin{cases} 2 & \textit{con prob.} \quad p_1 = 1/3 \\ \\ 5 & \textit{con prob.} \quad 1 - p_1 = 2/3 \end{cases}, X_2 = \begin{cases} -1 & \textit{con prob.} \quad p_2 = 3/4 \\ \\ 3 & \textit{con prob.} \quad 1 - p_2 = 1/4 \end{cases}.$$

Prendendo ora $\alpha = 0.7$, la mistura $X_1 0.7 X_2$ si può scrivere nel modo seguente:

$$X_1 0.7 X_2 = \begin{cases} 2 & \textit{con prob.} \quad 7/30 \\ 5 & \textit{con prob.} \quad 14/30 \\ -1 & \textit{con prob.} \quad 9/40 \\ 3 & \textit{con prob.} \quad 3/40 \end{cases}.$$

Le 4 probabilità della mistura sono i prodotti tra il valore di α e le probabilità delle v.a. originarie.

La parola *mistura* viene dal Calcolo delle Probabilità. La prima proprietà, banale da dimostrare, è:

$$X_1 \alpha X_2 = X_2 (1-\alpha) X_1. \tag{4.1.1}$$

Chiamando $F_{1\alpha 2}(t) = P(\{X_1 \alpha X_2 \leq t\})$ la funzione di ripartizione della v.a. $X_1 \alpha X_2$, essa sarà uguale a una combinazione lineare, con pesi α e $1-\alpha$, delle rispettive funzioni di ripartizione $F_1(t)$ e $F_2(t)$, quindi:

$$F_{1\alpha 2}(t) = \alpha F_1(t) + (1-\alpha) F_2(t).$$

Valgono le seguenti proprietà su tutte le misture:

- **Proprietà Archimedea:** Date 3 v.a X_1, X_2, X_3, esistono due numeri $\alpha, \beta \in (0,1)$ tali che:

  $$X_1 \succ X_2 \succ X_3 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 \alpha X_3 \succ X_2 \succ X_1 \beta X_3.$$

  Questa proprietà ha ovviamente un impatto sulle preferenze. In pratica, se X_2 è tra le tre la posizione intermedia ed è preferita a X_3, esisterà sempre una mistura di X_1 e X_3 che risulterà meno gradita di X_2. Analogamente, esisterà sempre una mistura di X_1 e di X_3 che risulterà preferita a X_2.

- **Proprietà di Sostituzione:** Date le posizioni X_1, X_2, con $X_1 \succ X_2$, per ogni $X_3 \in \mathcal{X}$, per ogni $\alpha \in (0,1]$, si avrà:

  $$X_1 \alpha X_3 \succ X_2 \alpha X_3.$$

  Il suo significato è abbastanza semplice, in quanto se X_1 è preferita a X_2, allora resterà preferita pure se sostituiremo una parte di X_1 e X_2 con una qualsiasi altra opportunità X_3.

- **Proprietà di Monotonia:** Date $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, con $X_1 \succ X_2$, e dati $\alpha, \beta \in [0,1]$, con $\alpha < \beta$, si ha:

  $$X_1 \beta X_2 \succ X_1 \alpha X_2.$$

  Anche qui tutto è molto intuitivo: l'ordinamento sui numeri α e β si trasferisce sulle relative misture con X_1 e X_2.

- **Proprietà di Consistenza:** Date le 2 posizioni $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, tali che $X_1 \succeq X_2$, allora per qualsiasi $\alpha \in [0,1]$ deve valere:

  $$X_1 \succeq X_1 \alpha X_2 \succeq X_2.$$

Anche qui, abbastanza semplice. Se $\alpha = 0$, la mistura si riduce a X_2 e la catena di preferenze è banale. Se $\alpha = 1$, la mistura si riduce a X_1 e la catena è banale. Se invece α è interno all'intervallo $[0,1]$, in pratica consegue dalla monotonia, perchè:

$$X_1 = X_1 1 X_2 \succeq X_1 \alpha X_2 \succeq X_1 0 X_2 = X_2.$$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare con tecniche matematiche abbastanza semplici. Come esempio, mostriamo una dimostrazione di un'altra proprietà, la **Proprietà di Continuità**.

Proposizione 50. *Date 3 posizioni $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$ tali che $X_1 \succeq X_2 \succeq X_3$, valgono le seguenti:*

1. *esiste $\alpha \in [0,1]$ tale che $X_2 \sim X_1 \alpha X_3$;*
2. *con l'ipotesi aggiuntiva $X_1 \succ X_3$, tale α esiste ed è unico.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda il punto 1, se $X_1 \sim X_2$ oppure $X_2 \sim X_3$, la tesi è facilmente dimostrata con $\alpha = 1$ oppure con $\alpha = 0$ rispettivamente. Se invece la preferenza è forte, per la Proprietà Archimedea, esistono α' e α'' tali che

$$X_1 \succ X_2 \succ X_3 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 \alpha' X_3 \succ X_2 \succ X_1 \alpha'' X_3.$$

Qui, per la Proprietà di Monotonia, $\alpha' > \alpha''$. ma allora, per continuità delle funzioni di ripartizione, esisterà $\alpha^* \in (\alpha', \alpha'')$ tale che $X_2 \sim X_1 \alpha^* X_3$.

Il punto 2 riguarda l'unicità. Se per assurdo ce ne fossero due, α^* e β^*, con $\alpha^* > \beta^*$ (non è una restrizione, essendo numeri reali uno deve essere maggiore dell'altro), avremmo, poichè $X_1 \succ X_3$, per la Proprietà di Monotonia:

$$X_2 \sim X_1 \alpha^* X_3 \succ X_1 \beta^* X_3 \sim X_2,$$

quindi $X_2 \succ X_2$, che è impossibile. □

Esercizio 51. ***Provare la seguente proprietà: date** $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{X}$**, se valgono** $X_1 \succ X_2$ **e** $X_3 \succ X_4$**, allora per ogni** $\alpha \in [0,1]$**, deve valere***

$$X_1 \alpha X_3 \succ X_2 \alpha X_4.$$

Per la Proprietà di Sostituzione, già sappiamo che

$$X_1 \succ X_2 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 \alpha X_3 \succ X_2 \alpha X_3,$$

per qualsiasi $\alpha \in (0,1]$ e per ogni altra posizione $X_3 \in \mathcal{X}$. Analogamente:

$$X_3 \succ X_4 \qquad \Longrightarrow \qquad X_3 \alpha X_2 \succ X_4 \alpha X_2.$$

Rinominando $\alpha = 1 - \beta$ *e applicando (4.1.1), si ha:*

$$X_2 \beta X_3 \succ X_2 \beta X_4,$$

che ovviamente vale per ogni $\beta \in (0,1)$.

Esercizio 52. ***Date le seguenti v.a.*** X ***e*** Y ***definite come segue:***

$$X = \begin{cases} 4 \quad \textbf{\textit{con prob.}} \quad p_1 = 1/5 \\ \\ -2 \quad \textbf{\textit{con prob.}} \quad 1 - p_1 = 4/5 \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 5 \quad \textbf{\textit{con prob.}} \quad q_1 = 1/6 \\ -1 \quad \textbf{\textit{con prob.}} \quad q_2 = 1/3 \\ 1 \quad \textbf{\textit{con prob.}} \quad q_3 = 1/2 \end{cases},$$

stabilire per quale $\alpha \in (0,1)$ ***la mistura*** $X\alpha Y$ ***ha media uguale a*** $1/2$***, e calcolare successivamente la varianza della mistura trovata.*** *Inizialmente, scriviamo l'espressione della mistura per un generico* α*:*

$$X\alpha Y = \begin{cases} 4 & \textit{con prob.} \quad \alpha/5 \\ -2 & \textit{con prob.} \quad 4\alpha/5 \\ 5 & \textit{con prob.} \quad (1-\alpha)/6 \\ -1 & \textit{con prob.} \quad (1-\alpha)/3 \\ 1 & \textit{con prob.} \quad (1-\alpha)/2 \end{cases}.$$

A questo punto, imponiamo che la media sia uguale a $1/2$*, condizione che genera un'equazione di primo grado nella variabile* α*:*

$$\mathbb{E}[X\alpha Y] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \cdot \frac{\alpha}{5} - 2 \cdot \frac{4\alpha}{5} + \frac{5(1-\alpha)}{6} - \frac{1-\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \alpha = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{54}{30}\alpha = -\frac{1}{2},$$

quindi il valore di α *cercato è* $\alpha = \dfrac{5}{18}$.

Allora la mistura assume la forma:

$$X \tfrac{5}{18} Y = \begin{cases} 4 \quad \textit{con prob.} \quad 1/18 \\ -2 \quad \textit{con prob.} \quad 2/9 \\ 5 \; \textit{con prob.} \quad 13/108 \\ -1 \; \textit{con prob.} \quad 13/54 \\ 1 \quad \textit{con prob.} \quad 13/36 \end{cases}.$$

La varianza risulta essere:

$$Var\left(X \tfrac{5}{18} Y\right) = 4^2 \frac{1}{18} + (-2)^2 \frac{2}{9} + 5^2 \frac{13}{108} + (-1)^2 \cdot \frac{13}{54} + 1^2 \cdot \frac{13}{36} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \frac{325}{108} + \frac{13}{54} + \frac{13}{36} - \frac{1}{4} = \frac{555}{108} = \frac{185}{36}.$$

Siamo ora pronti per legare la Teoria delle Preferenze alla Teoria dell'Utilità, ossia siamo in grado di vedere come una relazione di preferenza definisce in modo 'naturale' una funzione di utilità.

4.2 La rappresentazione dell'utilità

Il risultato essenziale della Teoria dell'Utilità risale al 1944, anno in cui John von Neumann e Oskar Morgenstern pubblicarono a Princeton il loro contributo fondamentale: il libro *Theory of Games and Economic Behavior*[VNM]. Per evitare eccessivi tecnicismi, ci rifaremo alla formulazione semplificata del Teorema di Rappresentazione enunciata nel Capitolo 2, Sezione 2.2 del [CDFM].

Teorema 53. *Data la relazione di preferenza* $\succeq$ *definita su un insieme delle opportunità* $\mathcal{X}$*, se essa:*

- *è riflessiva, transitiva e completa;*
- *soddisfa la Proprietà Archimedea;*
- *soddisfa la Proprietà di Sostituzione,*

allora esiste una funzione $u(x)$ *tale che* $\forall\ X_1, X_2 \in \mathcal{X}$*:*

$$X_2 \succeq X_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[u(X_2)] \geq \mathbb{E}[u(X_1)].$$

Inoltre, la funzione di utilità $u(x)$ *è unica a meno di una trasformazione lineare positiva crescente.*

Notare che per 'trasformazione lineare positiva crescente' (a volte detta anche *trasformazione affine positiva*) si intende che, ogni altra funzione di utilità indotta dalla relazione di preferenza $\succeq$ su $\mathcal{X}$ è del tipo

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta,$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

In un certo senso, la struttura di utilità estende e migliora quella data dall'operatore di ordinamento. Anzi, come operatore di ordinamento si potrà proprio scegliere $H(X) = \mathbb{E}[u(X)]$. La condizione sui valori attesi delle utilità si può anche suddividere nelle due condizioni che esprimono preferenza stretta ed equivalenza:

$$X_2 \succ X_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[u(X_2)] > \mathbb{E}[u(X_1)].$$

$$X_2 \sim X_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[u(X_2)] = \mathbb{E}[u(X_1)].$$

4.3 Il Criterio dell'utilità attesa

Il principio che andremo a esporre si chiama **Principio dell'utilità attesa**, anche detto **Criterio**, in quanto induce un ulteriore criterio di preferenza. Vanno premesse alcune assunzioni iniziali sull'insieme $\mathcal{X}$ da considerare e sulla funzione di utilità indotta dalla relazione di preferenza:

- ogni immagine $u(X)$ è a sua volta una v.a. definita per ogni $X \in \mathcal{X}$;
- ogni $u(X)$ ha valore atteso finito, cioè $\mathbb{E}[u(X)] < +\infty$.

L'idea cardine è quella di trasformare gli importi tramite una determinata funzione di utilità $u(x)$, opportunamente scelta dall'individuo $\mathcal{I}$, in base alla quale viene ri-definito l'operatore di ordinamento:

$$H(X) = \mathbb{E}[u(X)]. \tag{4.3.1}$$

Come ogni funzione di utilità, $u(\cdot)$, anche detta **utilità cardinale** o **utilità di von Neumann-Morgenstern**, è strettamente crescente, e date due posizioni $X, Y \in \mathcal{X}$, il passaggio dalla posizione X alla posizione Y è detto:

- *vantaggioso* se $\mathbb{E}[u(Y)] > \mathbb{E}[u(X)]$,
- *svantaggioso* se $\mathbb{E}[u(Y)] < \mathbb{E}[u(X)]$,
- *indifferente* se $\mathbb{E}[u(Y)] = \mathbb{E}[u(X)]$.

Possiamo anche ri-definire il concetto di equivalente certo in questo contesto. Nel caso in cui $x \in \mathcal{X}$ sia un importo certo, evidentemente $\mathbb{E}[u(x)] = u(x)$, quindi $h(x) = u(x)$ e di conseguenza

$$x^* = u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]). \tag{4.3.2}$$

In generale, data una v.a. X con determinazioni x_1 con probabilità p_1, x_2 con probabilità p_2,..., x_N con probabilità p_N, e ovviamente tutte le $p_k \geq 0$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$, la (4.3.2) si riscrive così:

$$x^* = u^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N} u(x_k)p_k\right). \tag{4.3.3}$$

Esempio 54. *Consideriamo un gioco del tipo 'Testa o Croce'. Un individuo $\mathcal{I}$ è in possesso di un patrimonio iniziale $p = 1000$ euro, e ad ogni lancio vince 50 euro se esce Testa e perde 40 euro se esce Croce. La sua funzione di utilità è di tipo logaritmico: $u(x) = \ln(1 + x)$. Essendo le probabilità dei due esiti* *uguali, quindi 1/2 e 1/2, la v.a. che indica il guadagno della scommessa è G e di conseguenza le due posizioni, iniziale e finale, saranno:*

$$X = 1000, \qquad Y = 1000 + G = \begin{cases} 1050 & \textit{con probabilità } \ 1/2 \\ 960 & \textit{con probabilità } \ 1/2 \end{cases}.$$

Le rispettive utilità attese sono:

$$\mathbb{E}[u(X)] = \ln(1001) = 6,908; \qquad \mathbb{E}[u(Y)] = \frac{1}{2}[\ln(1051) + \ln(961)] = 6,912.$$

La variazione è dunque positiva, anche se piccola:

$$\mathbb{E}[u(Y)] - \mathbb{E}[u(X)] = 6,912 - 6,908 = 0,004.$$

Quindi, la strategia che porta a cambiare posizione da X a Y risulta vantaggiosa.

Determiniamo anche l'equivalente certo in questo caso. La funzione inversa di $u(x) = \ln(1 + x)$ è un'esponenziale, per l'esattezza $u^{-1}(z) = e^z - 1$, quindi chiamando x^* e y^* i rispettivi equivalenti certi, si ha:

$$x^* = u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(x)]\right) = 1000, \qquad y^* = u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(Y)]\right) = e^{6,912} - 1 = 1003,253.$$

Notare come l'equivalente certo di X è X stesso, a meno di approssimazioni, essendo una posizione non aleatoria.

Abbiamo qui applicato la formula per l'equivalente certo data da (4.3.2). A volte, si usa una differente denominazione, cioè l'equivalente certo viene chiamato **media associativa** $M_u(X)$ della v.a. X. Possiamo ripetere la classificazione di vantaggiosità del cambio di posizione da X a Y in base alla media associativa. La scelta $X \to Y$ è

- *vantaggiosa* se $M_u(Y) > M_u(X)$,
- *svantaggiosa* se $M_u(Y) < M_u(X)$,
- *indifferente* se $M_u(Y) = M_u(X)$.

Riferendoci di nuovo all'Esempio precedente, si può stabilire la vantaggiosità anche considerando quindi le medie associative:

$$M_u(Y) - M_u(X) = 1003,253 - 1000 = 3,253 > 0.$$

Esercizio 55. ***Consideriamo la posizione certa*** $X = 500$ ***euro di un individuo*** $\mathcal{I}$ ***la cui funzione di utilità è*** $u(x) = \sqrt{x^2 + 3}$***. L'individuo può scommettere*** 400 ***euro del suo patrimonio su un evento sportivo***

che ha tre esiti, diciamo V (Vittoria), P (Pareggio) e S (Sconfitta). Il Pareggio, che avviene con probabilità p^* paga 1950 euro, mentre gli altri due esiti portano alla sconfitta.

Sapendo che l'evento Vittoria si verifica con probabilità $1/10$, quale deve essere il valore p^* affinchè la media associativa della scommessa Y sia di 600 euro? E in questo caso, la scelta di scommettere è o no vantaggiosa?

Prima di tutto, notiamo che possiamo subito rispondere alla seconda domanda, sapendo che la vantaggiosità si stabilisce sulla base delle medie associative. Già sappiamo che, essendo la posizione X certa, il suo equivalente certo è se stessa, quindi $M_u(X) = 500$, quindi $500 < 600$, cioè $M_u(X) < M_u(Y)$, quindi in questo caso la scelta di scommettere è vantaggiosa.

Riconsiderando il primo punto, possiamo schematizzare la forma della v.a. Y come segue:

$$Y = \begin{cases} 500 - 400 = 100 & \text{con probabilità } 1/10 \\ 1950 - 400 = 1550 & \text{con probabilità } p^* \\ 500 - 400 = 100 & \text{con probabilità } 9/10 - p^* \end{cases}$$

Calcoliamo il valore atteso della $u(Y)$ e successivamente invertiamo in quel punto la funzione di utilità per trovare l'equivalente certo. Successivamente, uguagliamo a 600 per risolvere l'equazione nel parametro p^*:

$$\mathbb{E}[u(Y)] = \sqrt{100^2+3}\cdot\frac{1}{10} + \sqrt{1550^2+3}\cdot p^* + \sqrt{100^2+3}\left(\frac{9}{10} - p^*\right) =$$

$$= 10,001 + 1550p^* + 90,009 - 10,001p^* = 100,01 + 1539,999p^*.$$

Applichiamo ora l'inversa della $u(x)$:

$$u(x) = y = \sqrt{x^2+3} \iff y^2 = x^2+3 \iff x^2 = y^2-3 \iff$$

$$\iff u^{-1}(y) = \sqrt{y^2-3},$$

avendo scartato la radice negativa perchè i valori con cui abbiamo a che fare sono soltanto positivi. Sostituendo alla y il valore atteso dell'utilità, avremo:

$$y^* = \sqrt{(\mathbb{E}[u(Y)])^2 - 3} \iff 600 = \sqrt{(100,01 + 1539,999p^*)^2 - 3},$$

da cui

$$(100,01+1539,999p^*)^2 - 3 = 360000 \iff 100,01+1539,999p^* = \sqrt{360003},$$

e quindi

$$p^* = \frac{\sqrt{360003} - 100,01}{1539,999} \simeq 0,3246 = 32,46\%.$$

Torniamo a parlare, in questo contesto, di avversione/propensione al rischio. L'avversione al rischio si può addirittura esprimere 'graficamente', come vedremo nella prossima Figura. Il caso più standard di funzione di utilità, maggiormente coerente con le consuete ipotesi di razionalità economica, è quello di funzione di utilità positiva, crescente e concava (il caso lineare, che è al contempo convesso e concavo, è raro e non-standard), in altre parole, considerando che $u(x) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, devono valere, per ogni $x \in \mathbb{R}_+$:

$$u(x) \geq 0; \qquad u'(x) > 0; \qquad u''(x) < 0.$$

Possiamo dare un'altra definizione di concavità di una funzione, che non richiede l'esistenza della derivata seconda: dati 2 qualsiasi punti distinti del dominio di $u(x)$, x_1 e x_2, si dice che $u(x)$ è **concava** se per ogni $\alpha \in (0, 1)$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\alpha u(x_1) + (1 - \alpha)u(x_2) < u[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2].$$

Per la definizione di convessità invece, come si può intuire, va usato il segno $>$ nella (4.3).

Una interpretazione intuitiva della concavità di una funzione a una variabile è appunto grafica: dati 2 punti qualsiasi del suo grafico, il segmento che li congiunge, la cui espressione è quella nel membro sinistro di (4.3), si trova tutto sotto al grafico della $u(x)$.

Le funzioni di utilità concave possiedono un'importantissima proprietà: è la **Disuguaglianza di Jensen**[1]: data una funzione di utilità concava $u(\cdot)$, si ha:

$$\mathbb{E}[u(X)] < u\left(\mathbb{E}[X]\right). \tag{4.3.4}$$

La disuguaglianza (4.3.4) stabilisce, che, in corrispondenza di una struttura concava di utilità, il valore atteso dell'utilità fornita da una posizione X è sempre minore dell'utilità fornita dal suo valore atteso.

In generale, data una v.a. X con determinazioni x_1 con probabilità p_1, x_2 con probabilità p_2,..., x_N con probabilità p_N, e ovviamente tutte le $p_k \geq 0$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$, la (4.3.4) si riscrive così:

$$\sum_{k=1}^{N} u(x_k)p_k < u\left(\sum_{k=1}^{N} x_k p_k\right). \tag{4.3.5}$$

Si può quantificare una **misura di rischiosità** $\Phi(\cdot)$, che ci sarà molto utile successivamente, in base alla differenza tra le due quantità come segue:

$$\Phi(X) = u\left(\mathbb{E}[X]\right) - \mathbb{E}[u(X)].$$

[1]Dal nome del matematico danese Johan Jensen (1859-1925).

Esempio 56. *Verifichiamo la disuguaglianza di Jensen e ricaviamo il valore della funzione $\Phi(X)$ data la seguente v.a.:*

$$X = \begin{cases} x_1 = 100 & \textit{con probabilità } 3/5 \\ x_2 = 20 & \textit{con probabilità } 2/5 \end{cases},$$

data una funzione di utilità $u(x) = \sqrt[3]{x}+5$. Notare che $u(x)$ verifica le proprietà, in quanto:

$$u(100) = \sqrt[3]{100} + 5 = 9,641; \qquad u(20) = \sqrt[3]{20} + 5 = 7,714,$$

quindi è positiva su tutti i valori del dominio. Inoltre, le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

$$u'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}; \qquad u''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-5/3},$$

rispettivamente positiva e negativa su tutte le determinazioni del dominio.

Si ha, rispettivamente:

$$\mathbb{E}[X] = 68; \qquad u\left(\mathbb{E}[X]\right) = u(68) = 9,081; \qquad \mathbb{E}[u(X)] = 8,87.$$

Si vede immediatamente che $u\left(\mathbb{E}[X]\right) > \mathbb{E}[u(X)]$, quindi(4.3.4) è soddisfatta. Invece,

$$\Phi(X) = u\left(\mathbb{E}[X]\right) - \mathbb{E}[u(X)] = 0,211.$$

Di seguito, la tipica rappresentazione grafica, facile da capire se consideriamo 2 qualsiasi valori x_1 e x_2 positivi.

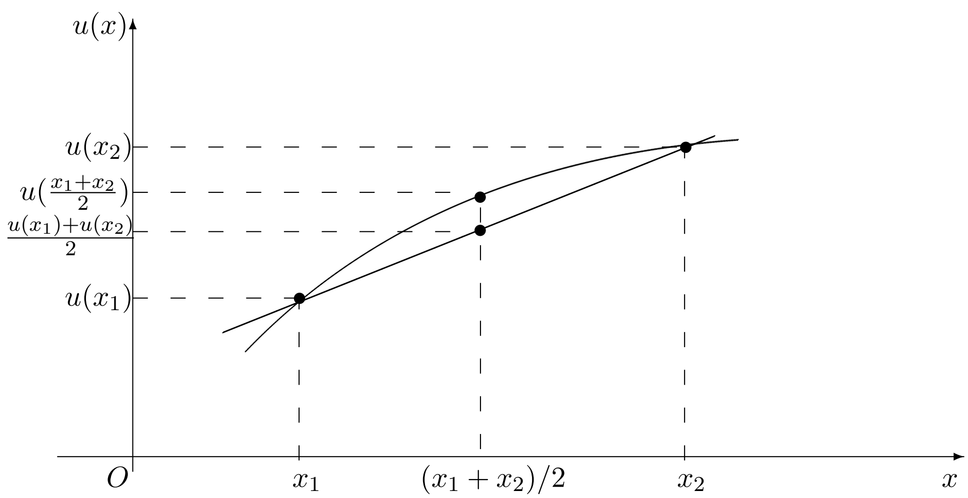

Figura 3. Una rappresentazione grafica della Disuguaglianza di Jensen

Dalla Figura 3, possiamo notare come, prendendo 2 qualsiasi punti x_1 e x_2, il valore dell'utilità generata dalla loro media sia maggiore della media delle due utilità di x_1 e x_2 proprio a causa della concavità di $u(\cdot)$, quindi in sintesi, come nella (4.3.4):

$$u\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{u(x_1)+u(x_2)}{2}.$$

Dalla (4.3.4) inoltre si ha un'ulteriore disuguaglianza che coinvolge l'equivalente certo: applicando su entrambi i membri la funzione $u^{-1}(\cdot)$ si ha

$$u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(X)]\right) < u^{-1}\left(u\left(\mathbb{E}[X]\right)\right) = \mathbb{E}[X],$$

da cui $x^* < \mathbb{E}[X]$.

Tornando all'argomento della misurazione del livello di avversione al rischio, questo può essere correlato alla funzione di utilità, grazie a una funzione introdotta da K. Arrow e da J. Pratt, in due diversi contributi tra il 1964 e il 1970.

Definizione 57. *Data una qualsiasi funzione di utilità $u(x)$, si chiama **misura (o funzione) di avversione al rischio di Arrow-Pratt** la seguente funzione:*

$$r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Fondamentalmente, $r_u(x)$ può essere chiamata una concavità relativa, positiva in quanto la derivata seconda è negativa. Si può provare che maggiore è il premio di indifferenza $\lambda(X)$, maggiore è la concavità relativa, e quindi maggiore è il suo rischio percepito. Se $u(x)$ fosse lineare, che è poi il caso limite, $r(x)$ sarebbe identicamente nulla.

Definizione 58. *Data una qualsiasi funzione di utilità $u(x)$, si chiama **misura relativa di avversione al rischio** la seguente funzione:*

$$xr_u(x) = -x \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Proposizione 59. *Data una qualsiasi funzione di utilità $u(x)$ e una sua qualsiasi trasformazione lineare positiva $v(x) = \alpha u(x) + \beta$, si ha che $r_u(x) = r_v(x)$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla formula per il calcolo di $r_v(x)$, cioè:

$$r_v(x) = -\frac{(\alpha u(x)+\beta)''}{(\alpha u(x)+\beta)'} = -\frac{\alpha u''(x)}{\alpha u'(x)} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = r_u(x).$$

□

Vale anche la seguente proprietà che mette in relazione i valori attesi di 2 diverse funzioni di utilità $u(x)$ e $v(x)$ con le loro misure di avversione al rischio (ma anche con le rispettive medie associative):

$$\mathbb{E}[u(X)] < \mathbb{E}[v(X)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_u(x) > r_v(x).$$

In un certo senso, il significato intuitivo di questo risultato è che se l'avversione al rischio è maggiore con una certa funzione di utilità, l'equivalente certo associato a quella funzione è minore.

Esercizio 60. ***Data la funzione di utilità esponenziale*** $u(x) = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}}$***, calcolare:***

- ***la relativa misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt;***
- ***l'equivalente certo*** x^****.***

Per quanto riguarda la misura di Arrow-Pratt, semplicemente applicandone la Definizione, si ha:

$$r(x) = -\frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}}{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2},$$

quindi è costante per ogni $x \in \mathbb{R}_+$*.*

Invece, l'equivalente certo si ricava da un calcolo leggermente più complicato. Prima di tutto, va notato che

$$y = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1-y}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{x}{2} = \ln\left(\frac{1-y}{2}\right),$$

quindi l'inversa di $u(\cdot)$ *risulta:* $x = u^{-1}(y) = -2\ln\left(\frac{1-y}{2}\right)$.

A questo punto, troviamo l'espressione di $\mathbb{E}[u(X)]$*, che risulta, per le note proprietà del valore atteso:*

$$\mathbb{E}[u(X)] = \mathbb{E}\left[1 - 2e^{-\frac{X}{2}}\right] = 1 - 2\mathbb{E}\left[e^{-\frac{X}{2}}\right].$$

Quindi usando la formula (4.3.2):

$$x^* = u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]) = u^{-1}\left(1 - 2\mathbb{E}\left[e^{-\frac{X}{2}}\right]\right) =$$

$$= -2\ln\left(\frac{1-\left(1-2\mathbb{E}\left[e^{-\frac{X}{2}}\right]\right)}{2}\right) = -2\ln\left(\mathbb{E}\left[e^{-\frac{X}{2}}\right]\right).$$

Notare che l'unità di misura dell'avversione al rischio è euro^{-1}, quindi se vogliamo un'unità di misura espressa in euro, possiamo usare il reciproco della $r_u(x)$, cioè $B(x) = \dfrac{1}{r_u(x)}$, che però sarà tanto più grande quanto più l'individuo $\mathcal{I}$ sarà propenso al rischio.

Nota 61. *La funzione di utilità dell'ultimo Esempio si può generalizzare per fornire la sua misura di avversione al rischio per ogni suo esponente. In generale, data $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$, avremo:*

$$r_u(x) = -\frac{\alpha \cdot (-\alpha)e^{-\alpha x}}{\alpha e^{-\alpha x}} = \alpha.$$

Risulta in pratica l'unico caso di avversione al rischio costante in ogni punto, a parte l'utilità lineare, molto raramente usata, $u(x) = \alpha x + \beta$, la cui misura di avversione al rischio è identicamente 0.

4.4 Altro sulle Funzioni di Utilità

In questo Capitolo, abbiamo visto negli Esempi vari tipi di funzioni di utilità $u(x)$, diverse tra loro ma tutte positive, crescenti e concave. In questa lista abbreviata riepiloghiamo alcune di quelle particolarmente rilevanti:

- **Utilità Esponenziale:** la forma più generale è data da

  $$u(x) = \alpha - \beta e^{-\gamma x},$$

  con α, β, γ parametri reali positivi. Anche per $\alpha = 0$ abbiamo una funzione crescente e concava, ma non tutta a valori positivi. Ha misura di Arrow-Pratt costante: $r_u(x) = \gamma$.

- **Utilità Logaritmica:** anche qui consideriamo la scrittura più generale:

  $$u(x) = \alpha + \ln(\beta x + \gamma),$$

  con α, β, γ parametri reali tali che la $u(x)$ sia definita per $x \geq 0$ (in questo caso l'argomento del logaritmo è positivo per $x > -\gamma/\beta$) e positiva.

- **Utilità Isoelastica o CRRA:** questa ha una forma tipo potenza, cioè, a meno di traslazioni:

  $$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \qquad \alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

L'acronimo CRRA significa 'Constant Relative Risk Aversion', e infatti la formula della Definizione 58 è

$$-x \cdot \frac{\frac{\alpha \cdot (\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\alpha}}{\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\alpha}} = 1-\alpha.$$

- **Utilità di tipo HARA:** hanno forma generale data da:

$$u(x) = \frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}, \qquad x > -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

  ed è semplice verificare che la loro misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt ha forma iperbolica.

Può essere utile conoscere l'approssimazione quadratica delle funzioni di utilità, per cui bisogna richiamare la formula di Taylor per ogni funzione che si può sviluppare in serie polinomiale attorno ad un punto x_0 del dominio (naturalmente parliamo di funzioni C^∞, cioè infinitamente derivabili e con tutte le derivate continue):

$$u(x) = u(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!},$$

dove $k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k$ indica il fattoriale e $u^{(k)}(x_0)$ indica la k-esima derivata di $u(x)$ valutata in x_0. Rinominando la variabile $x - x_0 = h$ e $p = x_0$, la precedente formulazione è equivalente a:

$$u(p+h) = u(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{(k)}(p)h^k}{k!},$$

Ora, supponiamo che $u(x)$ sia un'utilità e che p sia il patrimonio dell'individuo $\mathcal{I}$ e valutiamo un qualsiasi incremento h del patrimonio approssimando l'utilità con la serie di Taylor, fermandoci al secondo ordine perchè i termini successivi sono trascurabili:

$$u(p+h) \simeq u(p) + u'(p)h + \frac{u''(p)h^2}{2} + \cdots$$

da cui, usando l'uguaglianza, sottraendo $u(p)$ da entrambi i membri per valutare l'incremento si ha:

$$u(p+h) - u(p) = u'(p)h + \frac{u''(p)h^2}{2}$$

e poi, dividendo i membri per la derivata $u'(p)$, che è sempre positiva, otteniamo:

$$\frac{u(p+h)-u(p)}{u'(p)} = h + \frac{u''(p)}{u'(p)} \cdot \frac{h^2}{2}.$$

A primo membro abbiamo la variazione Δu tra le utilità, applicando l'incremento h, moltiplicata per un numero positivo, mentre nel secondo membro possiamo riconoscere la misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt, quindi:

$$\frac{\Delta u}{u'(p)} = h - \frac{r_u(p)h^2}{2}.$$

Considerando l'espressione come una funzione dell'incremento h, e considerando che il coefficiente del termine quadratico è negativo, il massimo della funzione si ottiene nel punto $h^* = -\frac{u'(p)}{u''(p)} = \frac{1}{r_u(p)}$, il che significa che più è alta l'avversione al rischio, più è piccolo il valore di h che massimizza la variazione. In altre parole, intuitivamente, la variazione massima è tanto più alta quanto più è alta la propensione al rischio.

Nel prossimo Capitolo si tornerà a parlare della Teoria dell'Utilità, nell'ambito dell'analisi bidimensionale sul piano Rischio-Rendimento, per stabilire un criterio di preferenza tra diversi titoli.

4.5 Esercizi proposti

1. **Date le seguenti v.a. X e Y:**

$$X = \begin{cases} 10 & \textbf{con prob.} \quad p_1 = 1/4 \\ \\ 24 & \textbf{con prob.} \quad p_2 = 3/4 \end{cases} \quad , \quad Y = \begin{cases} 15 & \textbf{con prob.} \quad q_1 = 1/5 \\ 40 & \textbf{con prob.} \quad q_2 = 1/5 \\ -10 & \textbf{con prob.} \quad q_3 = 3/5 \end{cases} \quad ,$$

scrivere la v.a. mistura $X0.4Y$ e calcolarne media e varianza.

$$\left[X0.4Y = \begin{cases} 10 & \text{con prob.} \quad 1/10 \\ 24 & \text{con prob.} \quad 3/10 \\ 15 & \text{con prob.} \quad 3/25 \\ 40 & \text{con prob.} \quad 3/25 \\ -10 & \text{con prob.} \quad 9/25 \end{cases} . \ \mathbb{E}[X0.4Y] = \frac{56}{5}. \ Var(X0.4Y) = 312,36 \right]$$

2. Date le seguenti v.a. X e Y:

$$X = \begin{cases} 100 & \textbf{con prob.} \quad p_1 = 1/4 \\ \alpha & \textbf{con prob.} \quad p_2 = 1/4 \\ 250 & \textbf{con prob.} \quad p_3 = 1/2 \end{cases} \quad , \quad Y = \begin{cases} 150 & \textbf{con prob.} \quad q_1 = 1/5 \\ 120 & \textbf{con prob.} \quad q_2 = 4/5 \end{cases} \quad ,$$

stabilire il valore di α tale che la v.a. mistura $X0.2Y$ abbia media uguale a 200. Fissato poi quel valore, calcolare la varianza di $X0.2Y$.
$[\alpha = 1384.\ Var(X0.2Y) = 75338,8]$

3. Consideriamo un individuo $\mathcal{I}$ in possesso di un patrimonio di 1000 euro e la cui funzione di utilità è $u(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$. L'individuo può scommettere 1000 euro del suo patrimonio su un evento sportivo che ha tre esiti, diciamo V (Vittoria), con probabilità $3/7$, P (Pareggio) con probabilità $2/7$ e S (Sconfitta), con probabilità $2/7$. In caso di vittoria, l'individuo vince 2500 euro, mentre gli altri due esiti portano alla sconfitta, e quindi alla perdita di tutto il patrimonio. Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[u(X)]$. $[\mathbb{E}[u(X)] = 1,578]$

4. Un individuo $\mathcal{I}$ gioca una scommessa puntando 500 euro. La vittoria, che gli frutta una vincita di 1000 euro (cioè $1500 - 500$), ha probabilità $3/5$. La sconfitta, che gli farebbe perdere tutti e 500 gli euro puntati, ha probabilità $2/5$. Essendo la funzione di utilità dell'individuo $u(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{3}}$, calcolare l'equivalente certo x^* della scommessa. $[x^* = 600,564]$

5. Data la funzione di utilità $u(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x+4}}{5}$, determinare la relativa misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt.
$$\left[r_u(x) = \frac{1}{2(x+4)}\right]$$

6. Data la famiglia di funzioni di utilità $u(x) = 1+\ln(kx+1)$, calcolare il valore di k affinchè la misura relativa di avversione al rischio nel punto $x = 1$ sia uguale a $3/5$. $\left[k = \dfrac{3}{2}\right]$

Capitolo 5

La Teoria del Portafoglio

Prima di addentrarci in uno dei problemi fondamentali di questo corso, ossia la selezione di un portafoglio ottimale, secondo le caratteristiche che rispondono alle ipotesi di razionalità economica, è utile fornire qualche definizione finanziaria elementare[1].

Prima di tutto, come definiamo l'**azione**? Un'azione è un titolo di capitale, detenuto da un portatore privato, pubblico, o in forma societaria, che garantisce dei diritti a chi la possiede, tra cui la facoltà di ricevere i **dividendi**, cioè una parte degli utili, che periodicamente vengono divisi tra gli azionisti, il diritto di voto in sede di assemblea societaria, con tutti gli altri azionisti. Generalmente, le azioni di molte aziende e società sono scambiate in Borsa, e il loro valore cambia di giorno in giorno a seconda dei movimenti tra gli operatori, del sentiment del mercato, di tutti gli avvenimenti politico-economici abbastanza importanti da influire sulle Borse.

Quanto vale un'azione? Al di là del prezzo quotidiano di un'azione nella Borsa, è possibile anche quantificarne il valore in senso più generale, meno soggetto agli umori del mercato finanziario. Ad esempio, il modello di Gordon (anni ′50) descrive il valore di un'azione come il valore attuale di una rendita perpetua le cui rate sono i dividendi futuri pagati agli azionisti (vedi [S], Capitolo 3).

I suddetti dividendi dipendono dagli utili futuri della società in questione, e quindi la valutazione di un'azione resta fortemente aleatoria. A tutto questo, si aggiunge che non tutti gli investitori, o detentori di azioni, hanno lo stesso comportamento sul piano delle strategie finanziarie: ad esempio, i cosiddetti *cassettisti* tendono a tenere in portafoglio i titoli molto a lungo, spesso fino a scadenza, mentre altri investitori tendono a muovere il mercato molto di

[1] Per una trattazione dal taglio divulgativo molto efficace, si può vedere il Capitolo 9 di [S].

più, comprando e vendendo continuamente. Chiaramente l'entità del flusso dei dividendi interessa molto di più al primo tipo di investitori che al secondo.

Passando alla nostra modellizzazione, tipicamente vanno enunciate alcune ipotesi (semplificative) sul mercato che trattiamo, soprattutto per non rendere la trattazione matematica troppo complessa e ingestibile. Come in ogni modello economico o finanziario, sono ipotesi molto vicine alla realtà che la 'approssimano' adeguatamente. Assumiamo che:

- **ogni agente sul mercato possa acquistare o vendere una qualunque quantità di titoli, anche un numero non intero, e che però sia anche price taker, cioè non possa, con la propria attività, influire sul prezzo dei titoli;**
- **che nel mercato non ci siano costi di transazione, commissioni sugli scambi, costi di intermediazione, eccetera;**
- **che esistano titoli con rendimento certo, vale a dire obbligazioni emesse o garantite da Enti che non possano fallire.**

5.1 Rendimento di un'azione e di un portafoglio

Il rendimento di un'azione è descritto da una v.a. R, il cui relativo valore atteso è la media $\mathbb{E}[R]$, e che prende la denominazione di *rendimento medio*. Invece il suo *rischio* è descritto dalla sua deviazione standard $\sigma(R)$ o σ_R, e che tipicamente è chiamata *volatilità* del titolo. In qualche maniera, anche da un qualsiasi grafico che descriva la serie storica di un'azione si può dedurre il livello di volatilità del titolo: un andamento più 'piatto' nel tempo indica una volatilità bassa, delle ampie oscillazioni invece suggeriscono un'alta volatilità.

Una prima formula di rendimento può essere introdotta in questo modo: considerando un intervallo temporale $[0, T]$, e un'azione che ha valore $S(0)$ nel primo istante del periodo considerato e $S(T)$ nell'ultimo istante, investendo la somma $x > 0$ in questo tipo di azioni, compreremo $\frac{x}{S(0)}$ azioni. Moltiplicando il numero di azioni per il valore finale $S(T)$, il valore del portafoglio sarà:

$$x\frac{S(T)}{S(0)} = x(1 + R),$$

per cui in pratica xR sarà l'interesse ottenuto dal capitale iniziale. A differenza del classico interesse fruttato da una capitalizzazione, questo interesse non sempre è positivo, perchè se il valore dell'azione fosse sceso da 0 a T, il rapporto $\frac{S(T)}{S(0)}$ risulterebbe inferiore a 1, e quindi $R < 0$.

Supponiamo ora di avere a disposizione 2 diversi titoli su cui investire, quindi facendo una piccola 'diversificazione' nel nostro portafoglio. In questo caso, possiamo stabilire un peso p da attribuire a uno dei due titoli, con $p \in [0,1]$. Chiamando R_1 la v.a. che indica il rendimento dell'azione 1 ed R_2 la v.a. rendimento dell'azione 2, possiamo indicare con X la v.a. che denota il valore del portafoglio:

$$X = x(1+R) = xp(1+R_1) + x(1-p)(1+R_2). \tag{5.1.1}$$

Possiamo esprimere il rendimento totale del portafoglio come una funzione lineare del peso p:

$$R(p) = pR_1 + (1-p)R_2.$$

E il **rendimento atteso del portafoglio** è invece, per la proprietà di linearità del valore atteso:

$$\mathbb{E}[R(p)] = p\mathbb{E}[R_1] + (1-p)\mathbb{E}[R_2]. \tag{5.1.2}$$

Chiamando poi $\sigma(R_1)$ e $\sigma(R_2)$ le volatilità dei singoli titoli, possiamo calcolare la varianza del portafoglio:

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(p) = \sigma^2(pR_1 + (1-p)R_2) =$$

$$= \sigma^2(pR_1) + \sigma^2((1-p)R_2) + 2\text{Cov}(pR_1, (1-p)R_2) =$$

$$= p^2\sigma^2(R_1) + (1-p)^2\sigma^2(R_2) + 2p(1-p)\text{Cov}(R_1, R_2),$$

per le proprietà di varianza e covarianza, entrambe omogenee di grado 2.

Chiamando poi ρ_{12} il coefficiente di correlazione, dato dalla relazione

$$\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma(R_1)\sigma(R_2)},$$

otteniamo l'espressione della **varianza del portafoglio**:

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(p) = p^2\sigma^2(R_1) + (1-p)^2\sigma^2(R_2) + 2p(1-p)\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2). \tag{5.1.3}$$

Ovviamente, per ottenerne la deviazione standard, è sufficiente prendere la radice quadrata, intesa come positiva, dell'espressione (5.1.3).

Inoltre, svolgendo i calcoli nell'espressione (5.1.3), possiamo notare come la varianza sia una funzione quadratica del peso p, infatti:

$$\sigma^2(p) = (\sigma^2(R_1) + \sigma^2(R_2) - 2\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2))p^2 +$$

$$+2(\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2) - \sigma^2(R_2))p + \sigma^2(R_2).$$

Ricapitolando, il rendimento medio è lineare in p e la varianza è quadratica sempre in p. Ma allora, la varianza ha un minimo assoluto e unico, facilmente calcolabile imponendo la derivata prima uguale a 0. Il fatto che sia un minimo deriva dalla positività del coefficiente di p^2, che quindi individua una parabola convessa, cioè a U. Il valore di p per cui $(\sigma^2)'(p) = 0$ è quello per cui otteniamo il **portafoglio a varianza minima** (o **PVM**). Possiamo calcolarlo esplicitamente:

$$(\sigma^2)'(p) = 2(\sigma^2(R_1)+\sigma^2(R_2)-2\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2))p+2(\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2)-\sigma^2(R_2)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p^* = \frac{\sigma^2(R_2) - \rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2)}{\sigma^2(R_1) + \sigma^2(R_2) - 2\rho_{12}\sigma(R_1)\sigma(R_2)}, \tag{5.1.4}$$

che è il valore critico p^*, che è però positivo se e solo se $\sigma(R_2) > \rho_{12}\sigma(R_1)$, ossia se $\rho_{12} < \dfrac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1)}$. Soltanto quando il valore p^* sta tra 0 e 1 esiste il PVM diversificato.

Ricordiamo che per varianza minima intendiamo anche *rischio minimo* o *volatilità minima*, quindi in qualche modo il valore p^* corrisponde alla scelta meno rischiosa, o con maggiore avversione al rischio, tra le tante possibili.

Risulta interessante notare che nel caso di perfetta correlazione negativa, ossia $\rho_{12} = -1$, l'espressione (5.1.4) si riduce a una forma molto più semplice, ossia

$$p^* = \frac{\sigma^2(R_2) + \sigma(R_1)\sigma(R_2)}{\sigma^2(R_1) + \sigma^2(R_2) + 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)} =$$

$$= \frac{\sigma(R_2)(\sigma(R_1) + \sigma(R_2))}{(\sigma(R_1) + \sigma(R_2))^2} = \frac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1) + \sigma(R_2)},$$

che è sempre strettamente compreso tra 0 e 1.

Se invece i 2 titoli sono completamente scorrelati, ossia $\rho_{12} = 0$, sostituendo in (5.1.4) troviamo:

$$p^* = \frac{\sigma^2(R_2)}{\sigma^2(R_1) + \sigma^2(R_2)},$$

anch'esso sempre in $(0, 1)$, quindi in questi 2 casi la diversificazione del portafoglio è assicurata.

Esempio 62. *Calcoliamo le funzioni di rendimento medio e di varianza di un portafoglio a 2 titoli, con queste caratteristiche:*

- *azione* 1*:* $R_1 = 3\%$, $\sigma(R_1) = 4\%$,
- *azione* 2*:* $R_2 = 2\%$, $\sigma(R_2) = 2,5\%$,

con coefficiente di correlazione $\rho_{12} = 0,29$. *Successivamente, calcoliamo il valore* p^* *per determinare il PVM e determiniamo il rendimento del portafoglio in quel caso.*

Inizialmente, scriviamo il rendimento medio del portafoglio, in funzione della quota p *da investire nell'azione* 1*:*

$$\mathbb{E}[R(p)] = 0,03p + 0,02(1-p) = 0,02 + 0,01p,$$

retta con coefficiente angolare positivo in quanto l'azione 1 *ha rendimento medio maggiore dell'azione* 2. *Invece, la varianza risulta:*

$$\sigma^2(p) = (0,04^2 + 0,025^2 - 2 \cdot 0,29 \cdot 0,04 \cdot 0,025)p^2 +$$

$$+2(0,29 \cdot 0,04 \cdot 0,025 - 0,025^2)p + 0,025^2 =$$

$$= 0,0016p^2 - 0,0006p + 0,0006.$$

Troviamo p^* *corrispondente alla minima volatilità:*

$$2 \cdot 0,0016p^* - 0,0006 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p^* = 0,1875,$$

che è accettabile in quanto compreso tra 0 1*.*

Possiamo quindi concludere che scegliendo il 18,75% *delle azioni da comprare come azioni* 1 *e il rimanente* 81,25% *come azioni* 2*, avremo la minima varianza possibile, e quindi la minima volatilità, nel nostro portafoglio. Se volessimo 'normalizzare' questi numeri per avere dei numeri interi, possiamo dire che, dovendo comprare in totale* 10000 *azioni da mettere in portafoglio,* 1875 *dovrebbero essere azioni* 1 *e* 8125 *dovrebbero essere azioni* 2*.*

Qual è il rendimento del portafoglio in corrispondenza del valore p^**? Basta sostituire e avremo:*

$$\mathbb{E}[R(p^*)] = 0,02 + 0,01p^* = 0,02 + 0,01 \cdot 0,1875 = 0,0218.$$

Bisogna però tenere a mente che il valore p^* che dà luogo al PVM deve essere compreso tra 0 e 1, per la sua natura stessa di peso nella composizione del portafoglio. Se questo non avviene, siamo in presenza di un caso particolare, quindi vediamo come comportarci Le Figure successive servono a descrivere graficamente questi contesti.

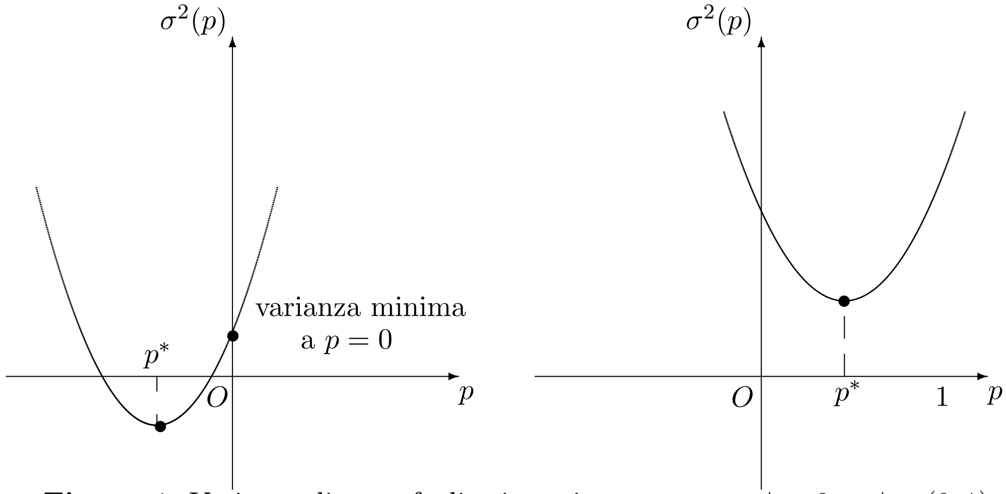

Figura 4. Varianze di portafoglio rispettivamente con $p^* < 0$ e $p^* \in (0, 1)$

Il caso a destra è quello dell'Esempio precedente, in cui p^* definisce una quota accettabile come peso tra 0 e 1, ed è quindi un esempio semplice di **diversificazione di portafoglio**. Invece, il grafico della parabola a sinistra ha un minimo p^* negativo, e quindi non accettabile. In questo caso, dobbiamo guardare soltanto il ramo di parabola che sta nel primo quadrante del piano cartesiano, ed è un ramo ovviamente crescente. Quindi, partendo dalla quota in cui la parabola interseca l'asse verticale, il livello più basso per la varianza sarà $p = 0$, e di conseguenza il portafoglio sarà costituito *soltanto dall'azione* 2, perchè la quota di portafoglio dedicata all'azione 1 è uguale a 0, e quindi niente diversificazione in quest'altro caso.

Supponiamo ora, invece, di stabilire un certo p fissato fin dall'inizio. Per ogni $p \in [0, 1]$ (consideriamo anche i 2 casi limite senza diversificazione, anche se meno interessanti), otteniamo un diverso portafoglio, cioè un portafoglio con diverse quantità, anche eventualmente numeri non interi, di azioni del primo e del secondo tipo. Per descrivere graficamente la situazione di ogni singolo possibile portafoglio, consideriamo un nuovo piano cartesiano (per la verità ne consideriamo soltanto il primo quadrante, a coordinate positive), in cui a ogni punto corrisponde un certo portafoglio, e le cui coordinate sono la sua volatilità e la sua media, e che quindi chiamiamo **Piano Volatilità-Media** o anche, in modo forse più descrittivo, **Piano Rischio-Rendimento**.

5.2 Analisi sul Piano Rischio-Rendimento e Curva delle Opportunità

L'idea di descrivere un qualunque portafoglio tramite la sua volatilità (cioè la sua deviazione standard, radice quadrata della relativa varianza) e il suo valore medio, come coordinate dei punti di un piano, risale all'economista Harry Markowitz nel 1952, e la stessa Teoria del Portafoglio è spesso indicata come Teoria di Markowitz. Markowitz ricevette nel 1990 anche il Premio Nobel, che tipicamente, tranne negli ultimissimi anni, viene assegnato ai più importanti studiosi in età molto avanzata, quando le scoperte fatte hanno dimostrato la loro importanza nel corso dei decenni.

Per semplificare la notazione, chiamiamo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}[R(p)] = M, & \mathbb{E}[R_1] = M_1, & \mathbb{E}[R_2] = M_2, \\ \sigma(R) = \sigma, & \sigma(R_1) = \sigma_1, & \sigma(R_2) = \sigma_2. \end{array}$$

Dall'equazione (5.1.2) otteniamo:

$$p = \frac{M - M_2}{M_1 - M_2},$$

e sostituendo nell'espressione della varianza (5.1.3) avremo:

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{M - M_2}{M_1 - M_2}\right)^2 + 2(\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\left(\frac{M - M_2}{M_1 - M_2}\right) + \sigma_2^2,$$

i cui termini possono successivamente essere riarrangiati e raccolti con alcuni passaggi algebrici, per arrivare ad un'equazione di una conica del tipo:

$$\sigma^2 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma,$$

con α, β e γ parametri reali che contengono σ_1, σ_2, ρ_{12}, M_1 ed M_2.

L'equazione suddetta è quella di un'iperbole, non equilatera, bensì con asintoti obliqui, o transversi, che non è esprimibile con un'unica funzione, ma con 2 diverse determinazioni:

$$\sigma(M) = \pm\sqrt{\alpha M^2 + \beta M + \gamma}.$$

Ma non tutta l'iperbole va considerata, bensì soltanto quel rametto di curva che sta tra i 2 punti del piano corrispondenti ai titoli considerati, e cioè alle azioni 1, punto (σ_1, M_1), e 2, punto (σ_2, M_2). Questo sottoinsieme dell'iperbole prende il nome di **insieme possibile** o **insieme delle opportunità** o **frontiera delle opportunità**.

Un esempio di frontiera delle opportunità sul piano Rischio-Rendimento è illustrato nella Figura 5.

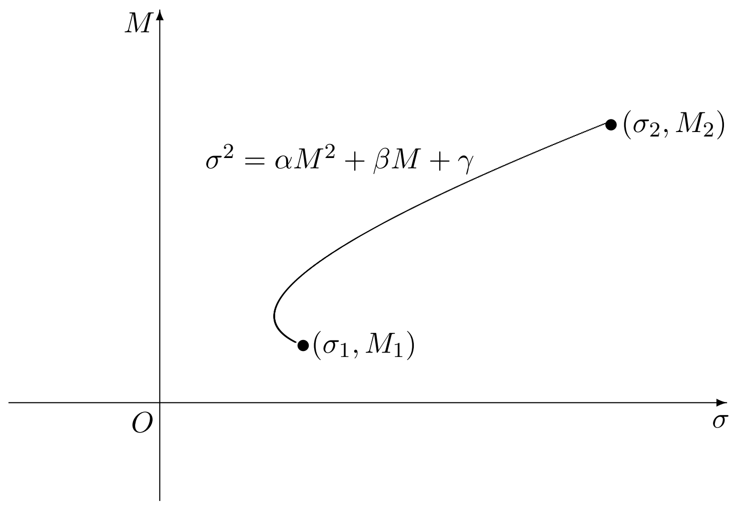

Figura 5. Ramo di iperbole nel piano Rischio-Rendimento

Esercizio 63. ***Trovare l'equazione dell'iperbole che descrive l'insieme delle possibilità dati i*** 2 ***titoli di coordinate*** $(5,2)$ ***e*** $(65,47)$ ***sul piano Rischio-Rendimento, con coefficiente di correlazione*** $\rho_{12} = 0,43$***.***

Si tratta di sostituire i valori $\sigma_1 = 5$*,* $\sigma_2 = 65$*,* $M_1 = 2$*,* $M_2 = 47$ *e il coefficiente* ρ_{12} *dato nell'equazione (5.1.3):*

$$\sigma^2 = (5^2+65^2-2\cdot 0,43\cdot 5\cdot 65)\left(\frac{M-47}{2-47}\right)^2+2(0,43\cdot 5\cdot 65-65^2)\left(\frac{M-47}{2-47}\right)+65^2 =$$

$$= 3970,5\cdot\left(\frac{(M-47)^2}{2025}\right) - 8170,5\left(\frac{M-47}{-45}\right) + 4225 =$$

$$= 1,9607(M^2 + 2209 - 94M) + 181,5666(M-47) + 4225 =$$

$$= 1,9607M^2 - 2,7392M + 22,5561.$$

Torniamo al caso in cui $\rho_{12} = -1$, già accennato, e ricaviamo il rendimento nel PVM. Sostituendo $p^* = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ in (5.1.3) otteniamo:

$$\sigma^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right) = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_1^2 + \left(1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_2^2$$

$$-2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\left(1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\sigma_1\sigma_2 = 2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2} - 2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2} = 0,$$

e quindi essendo la varianza del portafoglio nulla, il suo rendimento è certo, per cui corrisponderà a un punto sul semiasse positivo delle ascisse. Risulta facile calcolarlo, per esempio dalla relazione:

$$p^* = \frac{M^*-M_2}{M_1-M_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{M^*-M_2}{M_1-M_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad M^* = \frac{\sigma_2(M_1-M_2)}{\sigma_1+\sigma_2} + M_2 = \frac{\sigma_2 M_1 - \sigma_2 M_2 + \sigma_1 M_2 + \sigma_2 M_2}{\sigma_1+\sigma_2} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad M^* = \frac{\sigma_1 M_2 + \sigma_2 M_1}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

Questo valore di M^* è una media pesata delle varianze dei due titoli con i rendimenti, e può essere indicato sull'asse verticale del piano Rischio-Rendimento. Tracciando poi le 2 semirette uscenti dal punto $(0, M^*)$ e passanti rispettivamente per gli estremi della frontiera delle opportunità (σ_1, M_1) e (σ_2, M_2) otteniamo la Figura seguente:

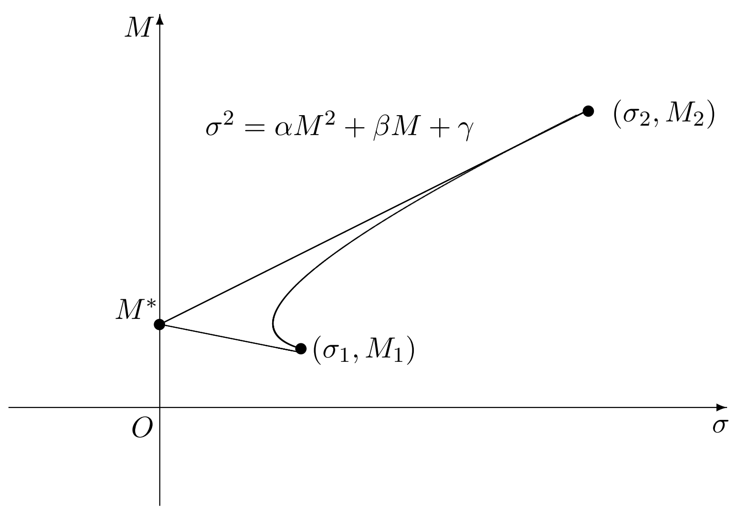

Figura 6. Ramo di iperbole e semirette per $\rho_{12} = -1$ nel piano

Dopo aver esaminato il caso di perfetta correlazione negativa, consideriamo quello di perfetta correlazione positiva, vale a dire $\rho_{12} = 1$. In questo caso, la varianza di portafoglio risulta, sempre sostituendo nella (5.1.3):

$$\sigma^2(p) = p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2 + 2p(1-p)\sigma_1\sigma_2 = (p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2)^2,$$

da cui $\sigma = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2$, in quanto la varianza è sempre positiva. Considerando insieme le 2 equazioni lineari e ricavando ed eliminando p, si ha:

$$\begin{cases} \sigma = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2 \\ \\ p = \dfrac{M - M_2}{M_1 - M_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma = \dfrac{M - M_2}{M_1 - M_2}\sigma_1 + \left(1 - \dfrac{M - M_2}{M_1 - M_2}\right)\sigma_2 \\ \\ p = \dfrac{M - M_2}{M_1 - M_2} \end{cases},$$

da cui la prima equazione risulta lineare:

$$(M_1 - M_2)\sigma = (M - M_2)\sigma_1 + (M_1 - M)\sigma_2 \implies \dots \implies$$

$$\implies M = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma + \frac{\sigma_1 M_2 - \sigma_2 M_1}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

cioè una retta, che però stacca il segmento passante per i 2 punti corrispondenti ai 2 titoli, che rappresentiamo in Figura 7.

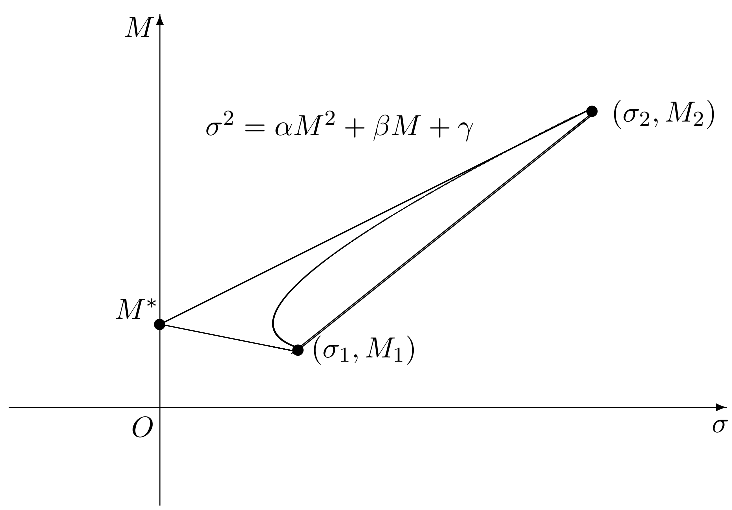

Figura 7. Ramo di iperbole, semirette per $\rho_{12} = -1$ e segmento per $\rho_{12} = 1$

In pratica, i 3 vertici $(0, M^*)$, (σ_1, M_1) e (σ_2, M_2) formano un triangolo all'interno del quale ci sono tutte le possibili frontiere delle opportunità al variare di $\rho_{12} \in [0, 1]$), dal caso perfettamente scorrelato, in cui la varianza è 0, a quello perfettamente correlato, in cui il ramo di iperbole collassa in un segmento nel piano che unisce i punti relativi alle 2 azioni nel portafoglio.

Sul piano Rischio-Rendimento è anche semplice implementare un criterio di preferenza coerente con quelli introdotti nella Teoria delle Preferenze. In questo caso, le 2 dimensioni sono particolarmente utili, perchè dati 2 qualsiasi punti $A = (\sigma_A, M_A)$ e $B = (\sigma_B, M_B)$, è facile stabilire che:

- Se $\sigma_A = \sigma_B$ e $M_A > M_B$, A è preferita a B perchè a parità di volatilità si preferisce una media maggiore. A maggior ragione, se $\sigma_A < \sigma_B$ e $M_A > M_B$, A è preferibile a B;
- se $M_A = M_B$ e $\sigma_A < \sigma_B$, A è preferita a B perchè a parità di media, si preferisce una volatilità minore. A maggior ragione, se $M_A > M_B$ e $\sigma_A < \sigma_B$, come sopra, A è preferibile a B;
- in tutti gli altri casi non si può stabilire un criterio di preferenza univoco e oggettivo: ad esempio, se $M_A > M_B$ ma anche $\sigma_A > \sigma_B$, cioè A possiede sia media che volatilità maggiori di B, la scelta è in qualche modo arbitraria, cioè subentra la scelta individuale dell'investitore $\mathcal{I}$. Se $\mathcal{I}$, data la sua propensione al rischio, è disposto ad accettare un rischio maggiore in cambio di un rendimento maggiore, preferirà A, altrimenti, se darà una maggiore importanza alla bassa volatilità, e quindi avrà bassa propensione al rischio, preferirà l'azione B.

Ad esempio, immaginiamo, sempre nella solita Figura, di considerare 2 punti con la stessa volatilità A e B. La preferenza cadrà su A, che ha media maggiore, come nella Figura 8.

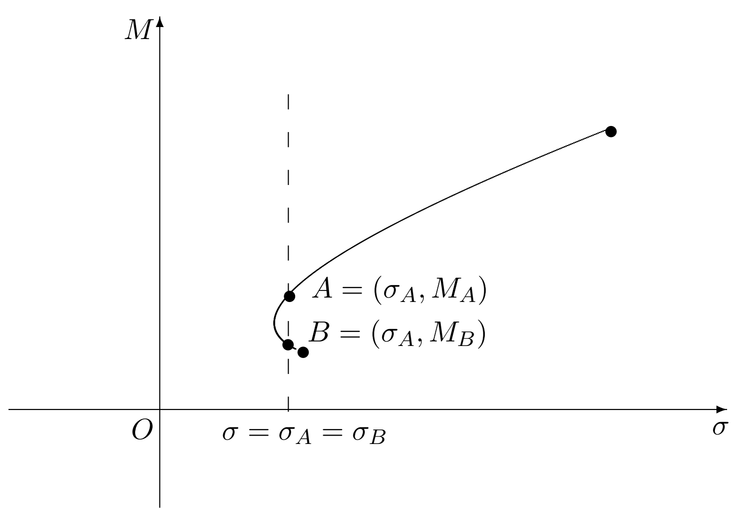

Figura 8. A parità di volatilità, A è preferito a B nel ramo di iperbole

Tornando alla nostra frontiera delle opportunità, qualsiasi punto della curva rappresenta un portafoglio. Un portafoglio si dice **efficiente** se nessun altro portafoglio della curva lo domina strettamente. Intuitivamente, guardando le ultime Figure, è abbastanza chiaro che i portafogli efficienti corrisponderanno ai punti 'più in alto'. Si definisce **frontiera efficiente** il sottoinsieme dei punti sulla curva delle opportunità formato dai portafogli efficienti.

5.3 Vendite allo scoperto sul mercato

Questa Sezione è analoga alla trattazione in [S]. Il caso in cui i titoli in portafoglio possono essere venduti allo scoperto (la **vendita allo scoperto**, anche detta **short selling**, è una strategia finanziaria legale, che consiste nel vendere un titolo in un istante precedente a quello in cui lo si possiede effettivamente) va trattato a parte. In pratica, ci sono 2 diverse situazioni, corrispondenti ai 2 titoli in portafoglio, che si verificano se il peso p si ritrova al di fuori dell'intervallo $[0, 1]$. Sostanzialmente:

- se $p < 0$, viene venduto allo scoperto il titolo 1;
- se $p > 1$, viene venduto allo scoperto il titolo 2.

Tipicamente, un'operazione di vendita allo scoperto comporta una vendita di un'azione ancora non posseduta[2] da parte di un investitore, che ricava il prezzo iniziale $S(0)$. Alla scadenza T, l'investitore si procura l'azione dal mercato al prezzo finale T e la restituisce all'intermediario, pagando il prezzo corrente $S(T)$.

Ovviamente, la vendita allo scoperto è fruttuosa se $S(T) < S(0)$, quindi in qualche modo è una scommessa sul ribasso del valore del titolo. Essendo di fatto una passività, consideriamo la vendita allo scoperto come una posizione del tipo $X = -x(1 + R)$.

Nella Teoria del Portafoglio di Markowitz, sotto l'assunzione che entrambe le azioni si possano vendere allo scoperto, il parametro p 'vive' su tutto l'asse reale e non più solo tra 0 e 1. Riprendendo quindi il valore già precedentemente calcolato del PVM, ossia

$$p^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2},$$

e ri-analizzando, possiamo ricavare lo spazio dei parametri per cui viene effettuata la vendita allo scoperto.

[2] Alternativamente, l'azione può essere prestata da qualche intermediario sotto precise condizioni di garanzia.

Ad esempio, se $\rho_{12} > \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$, allora $p^* < 0$ e vendiamo allo scoperto l'azione 1. Se invece $\rho_{12} > \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$, allora $p^* > 1$ ed è l'azione 2 quella che va venduta allo scoperto.

Per quanto riguarda la curva delle opportunità va notato che, a parte i casi $\rho_{12} = \pm 1$, in cui come abbiamo visto vengono individuati i segmenti nel primo quadrante, in tutti gli altri casi la curva è tutta l'iperbole e non soltanto il ramo tra i punti corrispondenti alle 2 azioni, se lo short selling è fattibile. Nel prossimo Esempio consideriamo uno scenario di possibile vendita allo scoperto.

Esempio 64. *Consideriamo i due titoli nel piano Rischio-Rendimento aventi le seguenti coordinate:*

$$A = (\sigma_A, M_A) = (0.09, 0.05), \qquad B = (\sigma_B, M_B) = (0.15, 0.07),$$

con coefficiente di correlazione $\rho_{AB} = 0,91$.

Calcoliamo prima di tutto i dati del PVM per poi dedurre se preveda o meno una vendita allo scoperto. Sostituendo i valori dati nella formula (5.1.4) otteniamo:

$$p^* = \frac{0,15^2 - 0,91 \cdot 0,09 \cdot 0,15}{0,09^2 + 0,15^2 - 2 \cdot 0,91 \cdot 0,09 \cdot 0,15} = 1,694.$$

Essendo quindi $p^* > 1$, *nel portafoglio di minima varianza si prevede la vendita allo scoperto dell'azione* B. *Vediamo la volatilità* σ *e il rendimento* M *in questo caso:*

$$\sigma^2 = \big(0,09^2 + 0,15^2 - 2 \cdot 0,91 \cdot 0,09 \cdot 0,15\big) \cdot 1,694^2 +$$

$$+2 \cdot (0,91 \cdot 0,09 \cdot 0,15 - 0,15^2) \cdot 1,694 + 0,15^2 = 0,0051,$$

da cui

$$\sigma = \sqrt{0,0051} = 0,0714.$$

Invece il rendimento medio risulterà:

$$M = p^*(M_A - M_B) + M_B = 1,694(0,05 - 0,07) + 0,07 = 0,0361.$$

In questo caso la curva delle opportunità è l'intera iperbole passante per i punti A *e* B *e con vertice in* $P = (\sigma, M) = (0.0714, 0.0361)$.

5.4 Problemi di Ottimizzazione di Portafoglio

L'estensione della Teoria del Portafoglio finora trattata al caso a $N \geq 2$ titoli è leggermente più complessa e richiede alcune nozioni di Algebra Lineare e di Analisi Matematica. Nel momento in cui i titoli sono più di 2, il portafoglio da considerare necessita di un numero maggiore di pesi, per cui dovremo considerare un intero vettore N-dimensionale di pesi

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}_+^N \quad \text{tale che} \quad p_1 + \cdots + p_N = 1,$$

come in una qualsiasi distribuzione discreta di probabilità.

Chiaramente, questo cambio di metodologia cambierà anche le formule per il rendimento medio e per la varianza del portafoglio.

Indicando con $R_1, \ldots, R_N$ i rendimenti aleatori delle N azioni per comporre il portafoglio, e al solito con $M = \mathbb{E}[R]$ il rendimento medio del portafoglio, avremo:

$$M = \mathbb{E}[R(\mathbf{p})] = \sum_{j=1}^{N} p_j \mathbb{E}[R_j], \tag{5.4.1}$$

avendo anche inserito per completezza (ma non sarebbe necessario) la dipendenza dal vettore dei pesi $\mathbf{p}$, come faremo tra poco nella varianza.

D'altra parte, la varianza del portafoglio sarà necessariamente una funzione quadratica.

Chiamando $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ le volatilità dei singoli titoli e stavolta rinominando le covarianze come $\mathrm{Cov}(R_i, R_J) = \sigma_{ij}$, per $i \neq j$, quindi la formula associata sarà $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, l'espressione della varianza di portafoglio σ^2 risulterà una *forma quadratica*:

$$\sigma^2(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{i<j} p_i p_j \sigma_{ij}. \tag{5.4.2}$$

La (5.4.2) merita qualche commento: la varianza è decomposta additivamente tra la prima somma delle N varianze dei titoli e una seconda somma, che è doppia, e che contiene tutti i prodotti misti tra le volatilità, pesati con i rispettivi pesi. Il grado è 2, per tutti i termini della varianza. Il caso più semplice, con $N = 2$, sarebbe:

$$\sigma^2(p_1, p_2) = p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\sigma_{12} + p_2p_1\sigma_{21} = p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 + 2p_1p_2\sigma_{12},$$

essendo evidentemente uguali le covarianze σ_{12} e σ_{21}, come prodotti di fattori uguali.

La cosa molto importante è che le forme quadratiche si possono associare naturalmente alle matrici simmetriche dell'Algebra Lineare (ricordiamo che una matrice simmetrica è una matrice quadrata, cioè di N righe ed N colonne, che è uguale alla sua trasposta, cioè alla matrice ottenuta da quella di partenza scambiandone le righe e le colonne). Prima di procedere nella descrizione dei problemi di Ottimizzazione di Portafoglio in forma vettoriale/matriciale, abbiamo bisogno di alcune Definizioni.

Definizione 65. *Date N v.a. $R_1, \ldots, R_N$, si chiama* ***matrice di covarianza (o delle varianze/covarianze)*** *la matrice*

$$C = (Cov(R_i, R_j)) = (\sigma_{ij}) \in M_N(\mathbb{R}).$$

Ad esempio, per $N = 3$, la matrice C ha la forma:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice delle varianze/covarianze è simmetrica e definita positiva, vale a dire ha tutti autovalori reali positivi, e come tutte le matrici di questo tipo si associa naturalmente ad una forma quadratica definita positiva come la nostra varianza di portafoglio.

Definizione 66. *Date N v.a. $R_1, \ldots, R_N$, si chiama* ***vettore dei rendimenti attesi*** *il vettore*

$$\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_N)^T = (\mathbb{E}[R_1], \ldots, \mathbb{E}[R_N])^T \in \mathbb{R}^N.$$

Inoltre, denotiamo il portafoglio tramite i suoi pesi con il vettore $\mathbf{p}$. Sia il rendimento medio (5.4.1) che la varianza di portafoglio (5.4.2) si possono scrivere quindi come prodotti scalari:

$$M(\mathbf{p}) =< \mathbf{p}, \mathbf{M} >= \mathbf{p}^T \mathbf{M}.$$

$$\sigma^2(\mathbf{p}) =< \mathbf{p}, C\mathbf{p} >= \mathbf{p}^T C \mathbf{p}.$$

Esempio 67. *Consideriamo un portafoglio composto dai seguenti* 3 *titoli:*

- *azione* 1*: $M_1 = 2,5\%$, $\sigma_1 = 6\%$;*
- *azione* 2*: $M_2 = 3\%$, $\sigma_2 = 7\%$;*
- *azione* 3*: $M_3 = 3,1\%$, $\sigma_3 = 11\%$.*

Il vettore che indica le quote di azioni in portafoglio è $\mathbf{p} = (0.3, 0.5, 0.2)^T$*. Inoltre, i coefficienti di correlazione tra le* 3 *azioni sono:* $\rho_{12} = 0.7$*,* $\rho_{13} = 0.8$*,* $\rho_{23} = 0.6$*. Calcoliamo il rendimento medio di portafoglio e la varianza del portafoglio.*

Prima di tutto, scriviamo le matrici e i vettori che ci saranno necessari nel calcolo. Ma non abbiamo ancora le covarianze, che vanno ricavate grazie ai coefficienti di correlazione (al solito, approssimiamo alla quarta cifra):

$$\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0,7 \cdot 0,06 \cdot 0,07 = 0,0029.$$

$$\sigma_{13} = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 = 0,8 \cdot 0,06 \cdot 0,11 = 0,0053.$$

$$\sigma_{23} = \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 = 0,6 \cdot 0,07 \cdot 0,11 = 0,0046.$$

La matrice C *è dunque data da:*

$$C = \begin{pmatrix} 0,06^2 & 0,0029 & 0,0053 \\ 0,0029 & 0,07^2 & 0,0046 \\ 0,0053 & 0,0046 & 0,11^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0036 & 0,0029 & 0,0053 \\ 0,0029 & 0,0049 & 0,0046 \\ 0,0053 & 0,0046 & 0,0121 \end{pmatrix}.$$

Invece, il vettore dei rendimenti medi è $\mathbf{M} = (0.025, 0.03, 0.031)^T$*. Di conseguenza, il rendimento atteso del portafoglio è dato da:*

$$M(\mathbf{p}) =< \mathbf{p}, \mathbf{M} >=< (0.3, 0.5, 0.2), (0.025, 0.03, 0.031) >=$$

$$= 0.3 \cdot 0.025 + 0.5 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.031 = 0,0287 = 2,87\%.$$

Perciò il rendimento medio di portafoglio è maggiore di quello dell'azione 1 *ma più basso di quelli delle azioni* 2 *e* 3*.*

Il calcolo della varianza di portafoglio è invece un pò più complesso:

$$\sigma^2(\mathbf{p}) =< \mathbf{p}, C\mathbf{p} >=$$

$$= \left\langle (0.3, 0.5, 0.2), \left(\begin{pmatrix} 0,0036 & 0,0029 & 0,0053 \\ 0,0029 & 0,0049 & 0,0046 \\ 0,0053 & 0,0046 & 0,0121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right)^T \right\rangle =$$

(prima va svolto il prodotto matrice x vettore e poi il prodotto scalare)

$$= \left\langle (0.3, 0.5, 0.2), \begin{pmatrix} 0,0036 \cdot 0,3 + 0,0029 \cdot 0,5 + 0,0053 \cdot 0,2 \\ 0,0029 \cdot 0,3 + 0,0049 \cdot 0,5 + 0,0046 \cdot 0,2 \\ 0,0053 \cdot 0,3 + 0,0046 \cdot 0,5 + 0,0121 \cdot 0,2 \end{pmatrix}^T \right\rangle =$$

$$= \left\langle (0.3, 0.5, 0.2), \begin{pmatrix} 0,0036 \\ \\ 0,0042 \\ \\ 0,0063 \end{pmatrix}^T \right\rangle =< (0.3, 0.5, 0.2), (0.0036, 0.0042, 0.0063) >=$$

$$= 0,3 \cdot 0,0036 + 0,5 \cdot 0,0042 + 0,2 \cdot 0,0063 = 0,0044.$$

E per concludere, passiamo alla volatilità del portafoglio, con la solita radice quadrata:

$$\sigma = \sqrt{0,0044} = 0,0666 = 6,66\%,$$

quindi la volatilità di portafoglio è più alta delle volatilità dell'azione 1*, ma più bassa di quella delle azioni* 2 *e* 3*.*

Proviamo ora ad analizzare un portafoglio basato su dati reali, in particolare i rendimenti e i coefficienti di correlazione di 3 grandi Compagnie americane nell'arco di 3 mesi. Il seguente Esempio è ricavato dalla Tabella 4.5 a pag. 62 di [EGBG], in versione semplificata in quanto nell'Esempio originale si considerano i dati su un arco temporale di 12 mesi.

Esempio 68. *Consideriamo i rendimenti mensili delle azioni di* 3 *grandi aziende molto diverse tra loro, e che operano in settori diversi: la IBM, l'Alcoa Alluminium (AA) e la General Motors (GM) nei primi tre mesi dell'anno (l'anno in questione non è comunque specificato in [EGBG]), schematizzati nella tabella seguente, espressi in termini percentuali*[3]*. Successivamente, consideriamo e mettiamo a confronto* 2 *diversi portafogli con diverse ripartizioni dei pesi dei singoli asset per stabilire quale è da preferire.*

Mese	*IBM*	*AA*	*GM*
Gennaio	$12,05$	$14,09$	$25,2$
Febbraio	$15,27$	$2,96$	$2,86$
Marzo	$-4,12$	$7,19$	$5,45$

I coefficienti di correlazione sono i seguenti:

$$\rho_{IBM-AA} = 0,05, \qquad \rho_{IBM-GM} = 0,48, \qquad \rho_{AA-GM} = 0,22.$$

Prima di tutto, calcoliamo i 3 *rendimenti medi, denotandoli con la lettera M:*

$$M_{IBM} = \frac{12,05 + 15,27 - 4,12}{3} = 7,73.$$

[3]Siccome in questo Esercizio abbiamo i dati con approssimazione alla seconda cifra dopo la virgola, manteniamo questa approssimazione per tutto l'Esercizio.

$$M_{AA} = \frac{14,09 + 2,96 + 7,19}{3} = 8,08.$$
$$M_{GM} = \frac{25,2 + 2,86 + 5,45}{3} = 11,17.$$

Con le consuete formule, calcoliamo le tre volatilità:

$$\sigma_{IBM} = \sqrt{\frac{(12,05 - 7,73)^2 + (15,27 - 7,73)^2 + (-4,12 - 7,73)^2}{3}} = 8,48.$$
$$\sigma_{AA} = \sqrt{\frac{(14,09 - 8,08)^2 + (2,96 - 8,08)^2 + (7,19 - 8,08)^2}{3}} = 4,58.$$
$$\sigma_{GM} = \sqrt{\frac{(25,2 - 11,17)^2 + (2,86 - 11,17)^2 + (5,45 - 11,17)^2}{3}} = 9,73.$$

A questo punto, possiamo scrivere le covarianze per la matrice C:

$$\sigma_{IBM-AA} = \rho_{IBM-AA}\sigma_{IBM}\sigma_{AA} = 1,94.$$
$$\sigma_{IBM-GM} = \rho_{IBM-GM}\sigma_{IBM}\sigma_{GM} = 39,6.$$
$$\sigma_{AA-GM} = \rho_{AA-GM}\sigma_{AA}\sigma_{GM} = 9,8.$$

La matrice C dunque sarà:

$$C = \begin{pmatrix} 71,91 & 1,94 & 39,6 \\ 1,94 & 20,97 & 9,8 \\ 39,6 & 9,8 & 94,67 \end{pmatrix}.$$

Mettiamo ora a confronto i rendimenti e le volatilità di due diversi portafogli, con le relative quote dei singoli asset nei vettori riga:

$$P_1 = (0.3, 0.5, 0.2), \qquad P_2 = (0.1, 0.7, 0.2).$$

I rispettivi rendimenti dei portafogli 1 e 2 risultano:

$$M_1 =< (0.3,\ 0.5,\ 0.2), (7.73,\ 8.08,\ 11.17) >= 8,59.$$
$$M_2 =< (0.1,\ 0.7,\ 0.2), (7.73,\ 8.08,\ 11.17) >= 8,66.$$

Quindi il rendimento del portafoglio 2 è maggiore di quello del portafoglio 1. Vediamo ora le rispettive varianze, chiamandole σ_1^2 e σ_2^2:

$$\sigma_1^2 = \left\langle (0.3, 0.5, 0.2), \left(\begin{pmatrix} 71,91 & 1,94 & 39,6 \\ 1,94 & 20,97 & 9,8 \\ 39,6 & 9,8 & 94,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right)^T \right\rangle =$$

$$= \left\langle (0.3, 0.5, 0.2), \begin{pmatrix} 30,46 \\ 13,02 \\ 35,71 \end{pmatrix}^T \right\rangle = \cdots = 22,79.$$

$$\sigma_2^2 = \left\langle (0.1, 0.7, 0.2), \left(\begin{pmatrix} 71,91 & 1,94 & 39,6 \\ 1,94 & 20,97 & 9,8 \\ 39,6 & 9,8 & 94,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right)^T \right\rangle =$$

$$= \left\langle (0.1, 0.7, 0.2), \begin{pmatrix} 16,47 \\ 16,83 \\ 29,75 \end{pmatrix}^T \right\rangle = \cdots = 19,37.$$

E quindi le due volatilità risultano:

$$\sigma_1 = \sqrt{22,79} = 4,77, \qquad \sigma_2 = \sqrt{19,37} = 4,4.$$

Di conseguenza, avendo il portafoglio 2 *un rendimento maggiore e una volatilità minore, è decisamente preferibile al portafoglio* 1*.*

Nella Figura seguente, visualizziamo le posizioni dei 3 *titoli e dei* 2 *portafogli* 1 *e* 2 *sul piano Rischio - Rendimento.*

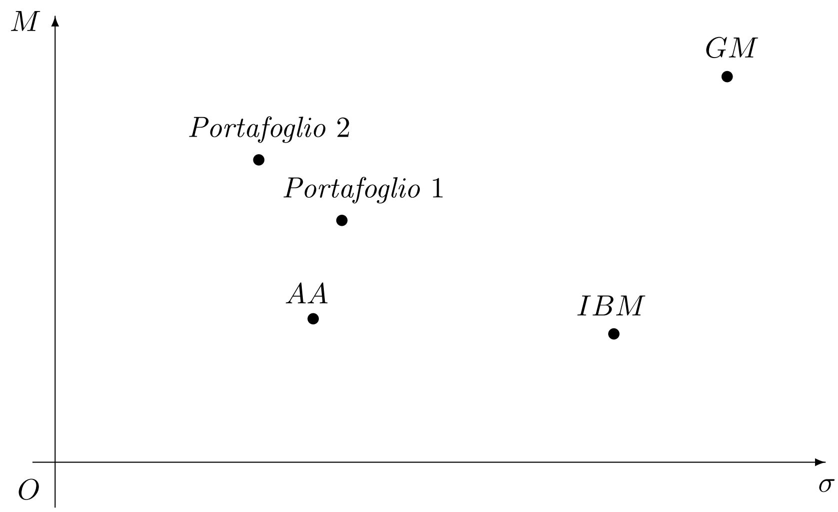

Figura 9. *Le azioni IBM, AA, GM e i portafogli* 1 *e* 2 *sul piano* (σ, M)

5.5 Ottimizzazione vincolata di Portafoglio

I problemi di ottimizzazione, in Economia, Finanza, Ricerca Operativa e altre discipline, tipicamente si suddividono in due classi: quelli di **ottimizzazione libera** e quelli di **ottimizzazione vincolata**. Nell'ottimizzazione vincolata, di cui non farò una lunga discussione perchè esula dagli scopi di questo Corso, i vincoli possono essere di vario genere e riguardano le variabili rispetto a cui massimizzare o minimizzare. In generale, quando i vincoli sono espressi con delle disuguaglianze, si fa riferimento alla **Teoria di Kuhn-Tucker**, mentre quando sono espressi da uguaglianze, come ad esempio certi vincoli di budget in Microeconomia, in generale si utilizza il **Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange**. Vedremo in breve come usare il secondo metodo in un problema di Ottimizzazione di Portafoglio.

Supponiamo di potere scegliere, per il nostro portafoglio, un numero N di azioni di cui conosciamo sia i rendimenti medi che le volatilità che i coefficienti di correlazione e di dover decidere come ripartire il nostro portafoglio, cioè di avere come incognite i pesi $p_1, \dots, p_N$. In questo caso il vincolo lineare è solo quello sulla somma dei pesi, cioè $p_1 + \cdots + p_N = 1$. Anche questo è un problema di determinazione del PVM, quindi dovremo minimizzare la funzione varianza, che però è quadratica nei pesi, come già sappiamo dall'espressione (5.4.2).

L'idea alla base del Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange[4], nel caso ad un unico vincolo, è la seguente: data una determinata funzione $\sigma^2(p_1, \dots, p_N)$ da minimizzare, e il relativo vincolo scritto in forma $F(p_1, \dots, p_N) = 0$, si scrive una nuova funzione detta **funzione Lagrangiana** con un'ulteriore variabile, detta **moltiplicatore di Lagrange**, solitamente indicata con λ:

$$L(p_1, \dots, p_N, \lambda) = \sigma^2(p_1, \dots, p_N) + \lambda F(p_1, \dots, p_N).$$

Ora, si calcola e annulla il gradiente della funzione Lagrangiana (il gradiente, va ricordato, è il vettore delle derivate parziali della funzione a più variabili), e dal sistema risultante, si ottiene il punto di minimo desiderato. Vediamo un Esempio-guida svolto con 3 titoli.

Esempio 69. *Data la seguente matrice delle varianze/covarianze, che descrive la varianza di un portafoglio con* 3 *azioni, determinare le quote* p_1^*, p_2^*, p_3^* *per*

[4] Una discussione e spiegazione più estesa su questo Metodo può essere trovata in qualsiasi libro di Analisi Matematica 2 o di Matematica Avanzata.

comporre il PVM:

$$C = \begin{pmatrix} 0,0041 & 0,0003 & 0,0411 \\ 0,0003 & 0,0053 & 0,0008 \\ 0,0411 & 0,0008 & 0,0099 \end{pmatrix}.$$

Inizialmente, scriviamo in modo esteso la funzione varianza da minimizzare, sempre basandoci sulla (5.4.2) con $N = 3$*:*

$$\sigma^2(p_1, p_2, p_3) = 0,0041p_1^2 + 0,0053p_2^2 + 0,0099p_3^2 +$$
$$+0,0006p_1p_2 + 0,0822p_1p_3 + 0,0016p_2p_3.$$

Il vincolo è dato dalla funzione $F(p_1, p_2, p_3) = p_1 + p_2 + p_3 - 1 = 0$*. Di conseguenza, la funzione Lagrangiana del problema è:*

$$L(p_1, p_2, p_3, \lambda) = \sigma^2(p_1, p_2, p_3) + \lambda(p_1 + p_2 + p_3 - 1).$$

Ora va calcolato il gradiente della Lagrangiana, ossia il vettore delle sue 4 *derivate parziali, rispetto ai pesi e rispetto al parametro reale* λ*, trattato esattamente come una normale variabile. Imponendo che il gradiente della Lagrangiana sia uguale a* 0*, otteniamo un sistema lineare di* 4 *equazioni in* 4 *incognite:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_3} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0,0082p_1 + 0,0006p_2 + 0,0822p_3 + \lambda = 0 \\ 0,0106p_2 + 0,0006p_1 + 0,0016p_3 + \lambda = 0 \\ 0,0198p_3 + 0,0822p_1 + 0,0016p_2 + \lambda = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Si nota immediatamente che la quarta equazione corrisponde esattamente al vincolo che abbiamo imposto. Procediamo a risolvere il sistema per sostituzioni successive, ricavando λ *nella prima equazione e* p_1 *nella quarta:*

$$\begin{cases} \lambda = -0,0082(1 - p_2 - p_3) - 0,0006p_2 - 0,0822p_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ p_1 = 1 - p_2 - p_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ p_1 = 1 - p_2 - p_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 \\ 0,0106p_2 + 0,0006(1 - p_2 - p_3) + 0,0016p_3 - 0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 = 0 \\ 0,0198p_3 + 0,0822(1 - p_2 - p_3) + 0,0016p_2 - 0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 = 0 \\ p_1 = 1 - p_2 - p_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 \\ 0,0176p_2 - 0,073p_3 - 0,0076 = 0 \\ -0,1364p_3 - 0,073p_2 + 0,074 = 0 \\ p_1 = 1 - p_2 - p_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -0,0082 + 0,0076p_2 - 0,074p_3 \\ \\ p_2 = \dfrac{0,073p_3 + 0,0076}{0,0176} \\ \\ -0,1364p_3 - 0,073\dfrac{0,073p_3 + 0,0076}{0,0176} + 0,074 = 0 \\ p_1 = 1 - p_2 - p_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ p_3^* = \dfrac{0,0424}{0,4391} = 0,0965 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases},$$

e successivamente sostituendo troviamo tutte le quote:

$$p_2^* = \frac{0,073 \cdot 0,0965 + 0,0076}{0,0176} = 0,832.$$

$$p_1^* = 1 - 0,832 - 0,0965 = 0,0715.$$

Il valore di λ può anche non essere determinato, in quanto ininfluente per il risultato. In definitiva, il PVM è dato da:

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0.0715, 0.832, 0.0965),$$

cioè se noi avessimo da comprare 10000 *azioni, ne compreremmo* 8320 *del tipo* 2*,* 965 *del tipo* 3 *e* 715 *del tipo* 1*. Sostituendo questi valori, troviamo anche il valore della varianza con questa ripartizione:*

$$\sigma^2(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = 0,0045.$$

Va infine puntualizzato che esistono anche altri problemi di ottimizzazione di portafoglio, che possono anche avere più vincoli. Ad esempio, un classico problema di cui presentiamo qui un unico esempio è quello della determinazione del portafoglio a varianza minima con rendimento medio fissato. In questo caso, il livello di rendimento medio è un vincolo lineare, dipendente dai pesi dei titoli in portafoglio, per cui i vincoli sono 2, e servono perciò 2 moltiplicatori di Lagrange.

Esempio 70. *Data i seguenti* 3 *titoli nel piano Rischio - Rendimento:*

$$A_1 = (0.02,\ 0.07), \qquad A_2 = (0.04,\ 0.09), \qquad A_3 = (0.07,\ 0.14),$$

e la seguente matrice C delle varianze/covarianze:

$$C = \begin{pmatrix} 0,0004 & 0 & 0,0411 \\ 0 & 0,0016 & 0 \\ 0,0411 & 0 & 0,0049 \end{pmatrix},$$

determinare le quote p_1^*, p_2^*, p_3^* per comporre il PVM tra tutti i portafogli aventi rendimento medio $0,1$ *(ammettendo anche le vendite allo scoperto). Successivamente determinare la volatilità del PVM.*

In questo caso, abbiamo un problema a 2 *vincoli: quello, standard, sulle quote, cioè $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, e quello sul rendimento atteso, cioè*

$$0,07p_1 + 0,09p_2 + 0,14p_3 = 0,1.$$

Poichè a ognuno dei due vincoli va assegnato un moltiplicatore di Lagrange, ne utilizzeremo 2*, denominati λ_1 e λ_2, pertento la funzione Lagrangiana avrà la seguente forma:*

$$L(p_1, p_2, p_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0,0004p_1^2 + 0,0016p_2^2 + 0,0049p_3^2 + 0,0822p_1p_3+$$

$$+\lambda_1(p_1 + p_2 + p_3 - 1) + \lambda_2(0,07p_1 + 0,09p_2 + 0,14p_3 - 0,1).$$

Ora, il sistema risultante dall'annullamento delle 5 *derivate parziali avrà dunque* 5 *equazioni lineari:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_3} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,0008p_1 + 0,0822p_3 + \lambda_1 + 0,07\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,0032p_2 + \lambda_1 + 0,09\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,0098p_3 + 0,0822p_1 + \lambda_1 + 0,14\lambda_2 = 0 \\ \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \\ 0,07p_1 + 0,09p_2 + 0,14p_3 = 0,1 \end{cases} .$$

Cominciamo usando le ultime due equazioni, con cui possiamo scrivere p_2 *e* p_3 *in funzione della sola* p_1*:*

$$\begin{cases} p_2 = 1 - p_1 - p_3 \\ \\ 0,07p_1 + 0,09(1 - p_1 - p_3) + 0,14p_3 = 0,1 \end{cases} \implies \begin{cases} p_2 = 1 - p_1 - p_3 \\ \\ 0,05p_3 = 0,02p_1 + 0,01 \end{cases} ,$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} p_2 = -1,4p_1 + 0,8 \\ \\ p_3 = 0,4p_1 + 0,2 \end{cases} .$$

Sostituendo nelle altre, otteniamo un sistema di 3 *equazioni lineari nelle incognite* p_1*,* λ_1 *e* λ_2*:*

$$\begin{cases} 0,0008p_1 + 0,0822(0,4p_1 + 0,2) + \lambda_1 + 0,07\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,0032 \cdot (-1,4p_1 + 0,8) + \lambda_1 + 0,09\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,0098(0,4p_1 + 0,2) + 0,0822p_1 + \lambda_1 + 0,14\lambda_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} 0,03368p_1 + 0,01644 + \lambda_1 + 0,07\lambda_2 = 0 \\ \\ -0,00448p_1 + 0,00256 + \lambda_1 + 0,09\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,08596p_1 + 0,00196 + \lambda_1 + 0,14\lambda_2 = 0 \end{cases},$$

e poi sottraendo la seconda equazione dalla prima e la terza equazione dalla prima eliminiamo λ_1 e otteniamo:

$$\begin{cases} 0,03368p_1 + 0,01644 + \lambda_1 + 0,07\lambda_2 = 0 \\ \\ 0,03816p_1 + 0,01388 - 0,02\lambda_2 = 0 \\ \\ -0,05228p_1 + 0,01448 - 0,07\lambda_2 = 0 \end{cases},$$

e infine, con le ultime 2 equazioni:

$$\begin{cases} 0,03368p_1 + 0,01644 + \lambda_1 + 0,07\lambda_2 = 0 \\ \\ p_1 = -0,36373 + 0,5241\lambda_2 \\ \\ -0,05228 \cdot (-0,36373 + 0,5241\lambda_2) + 0,01448 - 0,07\lambda_2 = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} p_1^* = 1,16025 \\ \\ \lambda_2 = 2,90782 \end{cases},$$

e quindi

$$p_1^* = 1,16025, \qquad p_2^* = -0,82435, \qquad p_3^* = 0,6641.$$

Infine, la volatilità del PVM risulta:

$$\sigma_P = \sqrt{0,0004 \cdot (1,16025)^2 + 0,0016 \cdot (-0,82435)^2 + 0,0049 \cdot (0,6641)^2 + 0,0822 \cdot 1,16025 \cdot 0,6641} = \sqrt{0,00053 + 0,00108 + 0,00216 + 0,06333} =$$

$$= \sqrt{0,0671} = 0,25903.$$

5.6 Curve di Indifferenza e Criteri di Preferenza nel Piano Rischio-Rendimento

Torniamo a parlare di Teoria dell'Utilità e di relative funzioni, come introdotte precedentemente. Proprio come accade nei problemi vincolati di minimizzazione della varianza, anche la massimizzazione dell'utilità, o dell'utilità attesa, o del payoff, di un qualsiasi agente economico può essere a sua volta un problema vincolato. Se usiamo ancora la notazione precedente, cioè indichiamo con $u(X)$ l'utilità, o il beneficio, che deriva dalla posizione finanziaria X, intendendo $u(X)$ come numero reale e non come v.a., possiamo collocare questo problema all'interno di un analisi di tipo Rischio-Rendimento.

Data una funzione di utilità che verifica le proprietà standard, considerando tutte le posizioni finanziarie di $\mathcal{X}$ aventi lo stesso valore atteso, chiamiamo **opportunità di frontiera** la posizione $\widetilde{X}$ che ha il minimo livello di volatilità, ossia di rischiosità, secondo la definizione che ne è stata data nel Capitolo 4. In pratica, fissando un livello $\widetilde{M}$ di valore atteso, un'opportunità di frontiera sarà soluzione del seguente problema vincolato:

$$\begin{cases} \min_{X \in \mathcal{X}} \Phi(X) = u(\mathbb{E}[X]) - \mathbb{E}[u(X)] \\ \\ \text{col vincolo } \mathbb{E}[X] = \widetilde{M} \end{cases} . \tag{5.6.1}$$

In pratica, nel piano Rischio-Rendimento si fissa un certo livello $\widetilde{M}$. L'opportunità di frontiera sarà rappresentata dal punto P di $\mathcal{X}$ più 'a sinistra' rispetto a tutti gli altri punti sulla retta $M = \widetilde{M}$, quindi quello col rischio minore. Il piano che consideriamo è una piccola variante del piano Rischio-Rendimento, in cui l'ordinata è la stessa, ma sulle ascisse c'è invece, anziché la volatilità, la suddetta rischiosità, e quindi il piano (σ, M).

Quindi ad ogni punto P del piano (σ, M) corrisponde una posizione finanziaria le cui coordinate sono il suo livello di rischiosità e il suo rendimento atteso, e l'insieme delle opportunità $\mathcal{X}$ diventa di fatto un sottoinsieme del piano (σ, m). L'utilità attesa di ogni punto P diventa una funzione a due variabili

$$U(P) = U(\sigma, M) = u(M) - \sigma,$$

le cui curve di livello (le **curve di indifferenza**[5]) sono curve nel piano. Il concetto di indifferenza è intuitivo: è indifferente scegliere un punto piuttosto che un altro sulla stessa curva di livello, perchè entrambi forniscono lo stesso livello di utilità (e invece cambiano sia la rischiosità che il rendimento atteso).

[5] Per essere ancora più precisi, andrebbero denominate **curve di isoutilità**.

Date 2 posizioni finanziarie $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, rappresentate rispettivamente dai punti del piano P_1 e P_2, possiamo descriverne la preferenza relativa facendo delle considerazioni sulla funzione $U(\cdot)$. Tali considerazioni 'qualitative' necessitano delle derivate parziali, che comunque in questo caso sono molto semplici, perchè la funzione $U(\cdot)$ è additivamente separabile. Va notato che

$$\frac{\partial U}{\partial M} = u'(M) > 0,$$

per la definizione di funzione utilità, anche a 1 variabile. Di conseguenza tra due punti aventi la stessa ascissa σ verrà preferito il punto con ordinata maggiore, quindi 'più in alto' sul piano. In altre parole, a parità di rischiosità, che nella derivata parziale rispetto all'altra variabile è tenuta ferma, si preferirà la posizione con rendimento atteso maggiore.

Analogamente, notando che

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = -1 < 0,$$

prendendo due posizioni con uguali livelli di rendimento atteso, verrà preferita quella con minore livello di rischiosità (perché all'aumentare del rischio, l'utilità diminuisce), e quindi su una stessa retta costante, verrà preferito il punto 'più a sinistra', più vicino all'asse verticale. Una raffigurazione di questo ordinamento di preferenza può essere visivamente utile.

Nella Figura 9 sono disegnate 3 curve di indifferenza, corrispondenti ai livelli di utilità K_1, K_2, K_3. Mettendo a confronto i punti sulle diverse curve, la posizione finanziaria A è da preferire a B perchè a parità di media e quindi di rendimento $m_A = m_B$, ha un livello più basso di rischiosità. Invece la posizione finanziaria C è da preferire alla posizione D perchè, dato uno stesso livello di rischiosità $\sigma_C = \sigma_D$, ha un rendimento atteso più alto. Invece, i punti B e D, ad esempio, non sono confrontabili, perchè B ha sia maggiore rendimento che maggiore rischio di D.

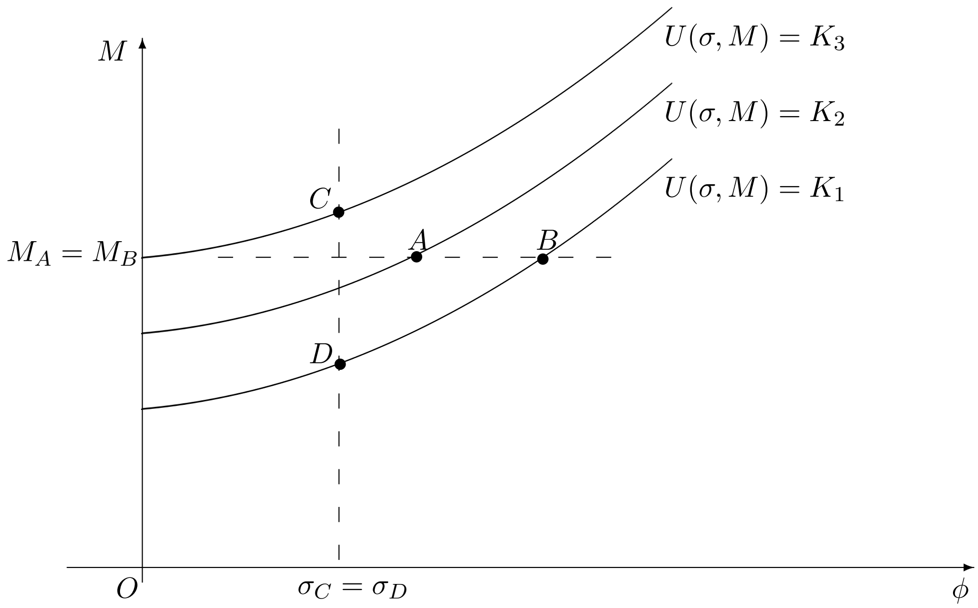

Figura 10. Tre curve di indifferenza nel piano (σ, M)

Si può anche visualizzare graficamente l'equivalente certo. Infatti, data una qualsiasi curva di indifferenza $U(\sigma, M) = K$, il suo valore quando $\sigma = 0$, quindi a zero rischio, corrisponde alla sua intersezione con l'asse verticale del rendimento medio, per cui:

$$u(M) - \sigma = K \qquad \Longleftrightarrow \qquad M(\sigma) = u^{-1}(\sigma + K),$$

da cui, per $\sigma = 0$, l'equivalente certo M^* risulta, per ogni livello K positivo:

$$M^* = u^{-1}(K).$$

Si può derivare abbastanza facilmente la convessità delle curve di indifferenza, grazie al Teorema delle Funzioni Implicite, che mette in relazione le derivate parziali di una funzione a 2 variabili con l'espressione locale di una variabile in funzione dell'altra[6]. La formula che ne risulta è particolarmente utile in quanto, anche se non fornisce l'espressione esatta della funzione localmente, ci dà informazioni sul suo comportamento qualitativo. In questo caso, il Teorema delle Funzioni Implicite afferma che data una curva di livello $U(\sigma, M) = K$, si

[6] La versione a 2 variabili è la più semplice, ne esiste una versione, più complessa, ad $N > 2$ variabili.

può esprimere localmente la derivata di $M(\sigma)$:

$$U(\sigma, M) = K \qquad \Longleftrightarrow \qquad dU = \frac{\partial U}{\partial M} dM + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = 0,$$

da cui scriviamo il rapporto tra i differenziali, che è uguale alla derivata:

$$\frac{dM}{d\sigma} = M'(\sigma) = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \sigma}}{\frac{\partial U}{\partial M}} = -\frac{-1}{u'(M)} = \frac{1}{u'(M(\sigma))},$$

positiva per le ipotesi sulla funzione utilità. Andando ad esaminare il segno della derivata seconda, avremo:

$$\frac{d^2M}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{u'(M(\sigma))}\right) = \frac{-u''(M(\sigma))}{(u'(M(\sigma)))^2} \cdot \frac{dM}{d\sigma} =$$

$$= \frac{-u''(M(\sigma))}{(u'(M(\sigma)))^2} \cdot \frac{1}{u'(M(\sigma))} = -\frac{u''(M(\sigma))}{(u'(M(\sigma)))^3},$$

che è una quantità positiva perchè, sempre per le ipotesi iniziali sull'utilità, $u' > 0$ e $u'' < 0$, quindi $M(\sigma)$ risulta convessa su tutto il dominio $\sigma \geq 0$.

Esempio 71. *Supponiamo che l'individuo $\mathcal{I}$ abbia l'utilità logaritmica*

$$u(x) = 1 + \ln(1 + x)$$

e ricaviamone $\Phi(X)$, l'espressione delle curve di indifferenza e l'equivalente certo della una curva di indifferenza al livello $K = 10$.

Prima di tutto, troviamo la funzione $\Phi(\cdot)$, ricordandone la formula e le proprietà dell'operatore media:

$$\Phi(X) = u\left(\mathbb{E}[X]\right) - \mathbb{E}[u(X)] = 1 + \ln\left(\mathbb{E}[X]\right) - \mathbb{E}[1 + \ln(1 + X)] =$$

$$= 1 + \ln\left(\mathbb{E}[X]\right) - 1 - \mathbb{E}[\ln(1 + X)] = \ln\left(\mathbb{E}[X]\right) - \mathbb{E}[\ln(1 + X)].$$

Poichè la forma della $U(\cdot)$ è data da:

$$U(\sigma, M) = u(M) - \sigma = 1 + \ln(1 + M) - \sigma,$$

allora la curva di indifferenza al livello $K = 10$ è

$$U(\sigma, M) = 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \ln(1 + M) - \sigma = 10,$$

da cui ricaviamo l'espressione esplicita di $m(\sigma)$ come segue:

$$\ln(1 + M) = \sigma + 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M(\sigma) = e^{\sigma + 9} - 1,$$

che essendo un'esponenziale con esponente positivo, è evidentemente una funzione crescente e convessa.

Esercizio 72. ***Data la funzione di utilità*** $u(x) = \sqrt[4]{x+2}$***, ricavare:***

- ***l'espressione della misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt*** $r_u(x)$***;***
- ***l'espressione della curva di indifferenza nel piano*** (σ, M) ***al livello*** $K = 3$***;***
- ***la forma esplicita della funzione*** $M(\sigma)$ ***nel piano*** (σ, M) ***e l'equivalente certo.***

La misura di Arrow-Pratt è calcolabile facilmente:

$$r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)(x+2)^{-7/4}}{\frac{1}{4}(x+2)^{-3/4}} = \frac{3}{4(x+2)}.$$

L'utilità attesa è la funzione $U(\sigma, M) = \sqrt[4]{M+2} - \sigma$*, quindi la curva di indifferenza a livello* 3 *è data da:*

$$\sqrt[4]{M+2} - \sigma - 3 = 0.$$

Per trovare $M(\sigma)$*, possiamo scegliere* 2 *diversi modi. O invertiamo semplicemente la formula precedente:*

$$\sqrt[4]{M+2} - \sigma - 3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M(\sigma) = (\sigma+3)^4 - 2,$$

oppure applichiamo il Teorema delle Funzioni Implicite, ottenendo:

$$\frac{dM}{d\sigma} = M'(\sigma) = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial \sigma}}{\dfrac{\partial U}{\partial M}} = -\frac{-1}{\frac{(M+2)^{-3/4}}{4}} = 4(M+2)^{3/4},$$

da cui, integrando membro a membro per separazione di variabili:

$$\frac{dM}{(M+2)^{3/4}} = 4d\sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dM}{(M+2)^{3/4}} = \int 4d\sigma \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{(M+2)^{1/4}}{\frac{1}{4}} = 4\sigma + C \Longrightarrow \qquad 4(M+2)^{1/4} = 4\sigma + C,$$

e semplificando (rinominando $C/4 = K$*), si ha*

$$\sqrt[4]{M+2} - \sigma - K = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[4]{M+2} - \sigma - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M(\sigma) = (\sigma+3)^4 - 2.$$

Infine, per $\sigma = 0$*, abbiamo l'equivalente certo:*

$$M^* = M(0) = 3^4 - 2 = 79.$$

5.7 Utilità e Frontiera Efficiente

Vediamo ora come unire l'analisi delle curve di indifferenza con quella dell'insieme delle opportunità, sfruttando le informazioni date dalle forme delle curve. Partendo da un insieme delle opportunità e considerando il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ che chiamiamo $\mathcal{F}$, sarà detto **frontiera delle opportunità**, vediamo un esempio di frontiera delle opportunità nella Figura 10.

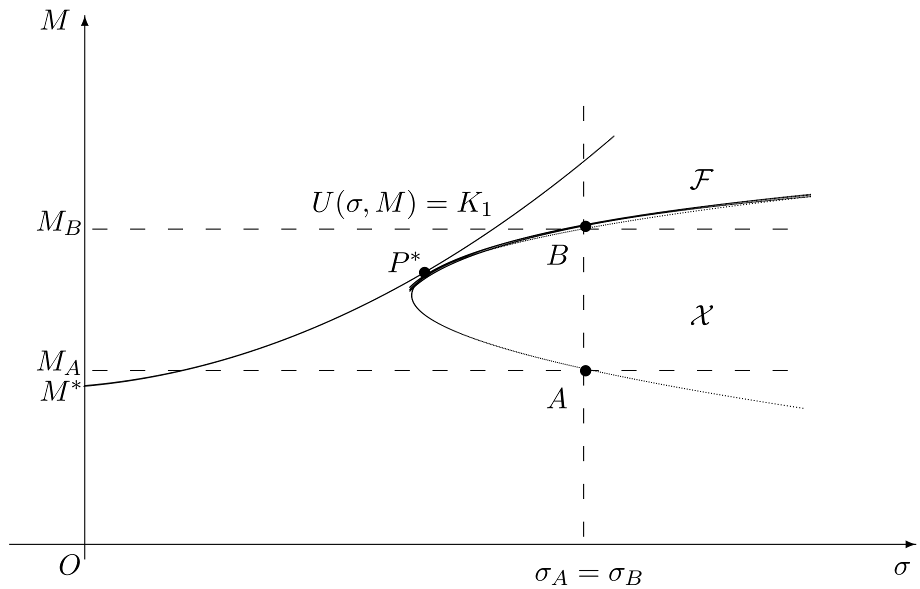

Figura 11. Frontiera delle opportunità $\mathcal{F}$ in neretto nel piano (σ, M)

Ogni possibile livello di rendimento atteso è una semiretta orizzontale sul piano, e già sappiamo che tutti i punti collocati più a sinistra costituiscono la curva $\mathcal{F}$, la frontiera delle opportunità. Inoltre, considerando le semirette verticali e quindi fissando dei livelli di rischiosità, tutti i punti che hanno il massimo rendimento atteso a parità di rischiosità costituiscono la **frontiera efficiente**.

La parte di frontiera delle opportunità costituita dagli altri punti, cioè quelli al di fuori della frontiera efficiente, è talvolta detta **frontiera inefficiente**. Inoltre, i punti della frontiera efficiente sono anche detti di **ottimo paretiano** (dal nome dell'economista italiano Vilfredo Pareto).

Ad esempio, nella Figura 10, i punti A e B hanno la stessa ascissa $\sigma_A = \sigma_B$. Chiaramente, B risulta preferito ad A in quanto il suo rendimento atteso M_B è maggiore di M_A, rendimento atteso di A. Invece, il punto P^*, di tangenza tra la curva di indifferenza con utilità attesa fissata a K_1 e la frontiera delle opportunità è il **punto di massimo**. Il punto $M*$, cioè l'ordinata dell'intersezione tra la curva di indifferenza e l'asse dei rendimenti è l'equivalente certo, il quale viene anche detto **prezzo di indifferenza**.

La massimizzazione dell'utilità avviene appunto determinando il punto di massimo, tra i punti della frontiera efficiente.

5.8 Esercizi Proposti

1. Calcolare le funzioni di rendimento medio e di varianza di un portafoglio a 2 titoli, con le seguenti caratteristiche:

- **azione** 1**:** $R_1 = 4,1\%$, $\sigma(R_1) = 6,1\%$,
- **azione** 2**:** $R_2 = 2,1\%$, $\sigma(R_2) = 2,7\%$,

con coefficiente di correlazione $\rho_{12} = 0,37$**. Usare** p **come parametro percentuale che pesa la quota investita nell'azione** 1**.**

$$\left[\mathbb{E}[R(p)] = 0,021 + 0,02p. \qquad \sigma^2(p) = 0,0032p^2 - 0,0002p + 0,0007\right]$$

2. Date le 2 **seguenti azioni da inserire in un portafoglio, aventi le seguenti caratteristiche:**

- **azione** 1**:** $R_1 = 1,1\%$, $\sigma(R_1) = 1,9\%$,
- **azione** 2**:** $R_2 = 0,7\%$, $\sigma(R_2) = 1,7\%$,

con coefficiente di correlazione $\rho_{12} = 0,05$**, determinare la quota** p^* **da investire nell'azione** 1 **che corrisponde al portafoglio di minima varianza (PVM).** $[p^* = 0,4652]$

3. Date le 2 **seguenti azioni da inserire in un portafoglio, aventi le seguenti caratteristiche:**

- **azione** 1**:** $R_1 = 3,1\%$, $\sigma(R_1) = 2,9\%$,
- **azione** 2**:** $R_2 = 0,9\%$, $\sigma(R_2) = 1,1\%$,

determinare il loro coefficiente di correlazione ρ_{12}**, affinche la quota** p^* **da investire nell'azione** 1 **corrispondente al portafoglio di minima varianza (PVM) sia uguale a** $0,2$**.** $[\rho_{12} = -0,373]$

4. Data la seguente matrice delle varianze/covarianze, che descrive la varianza di un portafoglio con 3 azioni, determinare le quote p_1^*, p_2^*, p_3^* per comporre il PVM:

$$C = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0,091 & 0 \\ 0,04 & 0 & 0,07 \end{pmatrix}.$$

$$[(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*) = (-3.0333,\ 1,\ 3.0333)]$$

5. Data la seguente matrice delle varianze/covarianze, che descrive la varianza di un portafoglio con 4 azioni, determinare le quote p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^* per comporre il PVM:

$$C = \begin{pmatrix} 0,03 & 0 & -0,04 & 0 \\ 0 & 0,07 & 0 & 0 \\ -0,04 & 0 & 0,05 & -0.01 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0,06 \end{pmatrix}.$$

$$[(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*,\ p_4^*) = (0.533,\ -0.0119,\ 0.4205,\ 0.0562)]$$

6. Data la funzione di utilità $u(x) = \sqrt[4]{4x} + 1$, ricavare l'espressione della misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt $r_u(x)$,l'espressione della curva di indifferenza nel piano (σ, M) al livello $K = 5$, e il valore dell'equivalente certo M^*.

$$\left[r_u(x) = \frac{3}{4x}. \qquad M(\sigma) = \frac{(\sigma + 4)^4}{4}. \qquad M^* = 64 \right]$$

Capitolo 6

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Una ormai classica estensione della Teoria del Portafoglio introdotta nel precedente Capitolo è quella che prevede anche la possibilità di inserire in portafoglio un titolo a rendimento certo, e che naturalmente modifica la natura della frontiera efficiente.

Il **Capital Asset Pricing Model** (da ora in poi, abbreviato in **CAPM**) fu inizialmente proposto da William Sharpe nel 1964, ha come intento quello di sintetizzare in un unico parametro, o indice, per cui si è sempre usata la lettera greca *beta*, le informazioni necessarie su rendimento e rischiosità di ogni singolo titolo. Ma andiamo con ordine.

6.1 Estensione del Modello di Markowitz

Supponiamo di estendere la Teoria del Portafoglio standard con un'importante nuovo elemento: l'esistenza nel mercato, e quindi la facoltà di essere trattato come tutti gli altri titoli di natura aleatoria, di un titolo a rendimento certo, cioè a rischiosità nulla. L'avevamo già introdotto, descrivendolo come un punto $(0, M^*)$ sull'asse delle ordinate del piano Rischio-Rendimento. Intuitivamente, possiamo immaginarlo come un titolo obbligazionario che sarà sicuramente rimborsato, completamente e alla sua esatta scadenza[1]. Ora, costruiamo un portafoglio minimo con questo titolo a rendimento certo e un altro titolo, di rendimento R_1, indicato dal punto (σ_1, M_1), a coordinate positive, nel piano. Un'assunzione abbastanza naturale è che il rendimento medio del secondo titolo sia maggiore di

[1]In [S], l'autore suggerisce un'altra possibile interpretazione, di natura più 'bancaria': un conto di deposito perpetuo che offre un determinato rendimento periodale certo.

quello dell'asset certo, che avendo rischio nullo, dovrebbe avere un rendimento certo ma 'basso'. Questo è piuttosto standard e confermato anche dal fatto che a basso rischio corrisponde un basso rendimento, basti pensare ai titoli valutati come 'tripla A' dalle agenzie di rating, che spesso hanno rendimenti addirittura negativi (titoli di Stato tedeschi, olandesi, lussemburghesi, ecc.).

Chiamiamo p la quota del capitale iniziale x da investire nel titolo rischioso, $R(p)$ il rendimento di portafoglio, ed $M_p = \mathbb{E}[R(p)]$ il rendimento medio di portafoglio. Come sopra, il rendimento risulta:

$$R(p) = pR_1 + (1-p)M^* \qquad \Longrightarrow \qquad M_p = pM_1 + (1-p)M^*.$$

Ora, considerando che la volatilità del titolo rischioso è $\sigma(p) = p\sigma_1$, possiamo mettere rischio e rendimento in un'unica equazione lineare che passi per i 2 punti eliminando il parametro p (si può fare anche con una semplice formuletta da Scuola Superiore):

$$M = \frac{M_1 - M^*}{\sigma_1}\sigma + M^*. \tag{6.1.1}$$

la semiretta (6.1.1) è indicata normalmente come **Capital Allocation Line**. Il suo coefficiente angolare è invece il cosiddetto **indice di Sharpe** del titolo 1.

L'estensione più naturale successiva è un modello di portafoglio con 2 titoli rischiosi, corrispondenti ai punti $P_1 = (\sigma_1, M_1)$ e $P_2 = (\sigma_2, M_2)$ e un titolo a rendimento certo. In questo caso, e anche con $N > 2$ titoli dai rendimenti aleatori, l'insieme possibile cambia la sua stessa Geometria, nel senso che non è più solo la parte interna dell'iperbole transverso. L'insieme possibile è costituito da tutte le semirette uscenti dal punto $(0, M^*)$ che hanno un punto in comune con l'iperbole di equazione cartesiana $\sigma^2 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma$, come possiamo vedere in Figura 11, quindi una sorta di 'cono' o di 'triangolo infinito', tra le 2 semirette in Figura. Evidenziamo qui anche la **Capital Market Line** (o **CML**), che di fatto è la frontiera efficiente in questo caso. Notare che la seconda semiretta, quella inferiore, è esattamente simmetrica alla prima rispetto all'orizzontale, quindi in pratica è generata da una rotazione di 180 gradi attorno all'asse di simmetria, che è la retta orizzontale $M = M^*$.

Per la determinazione dell'equazione della CML, esiste una formula abbastanza diretta da applicare. Si scrive il **vettore dei rendimenti in eccesso**

$$\mathbf{e}^{\mathbf{T}} = (M_1 - M^*, M_2 - M^*, \ldots, M_N - M^*)^T$$

e successivamente, data la matrice delle varianze/covarianze C, se ne calcola l'inversa C^{-1} (consideriamo ovviamente solo il caso non degenere in cui C è invertibile, ossia $\det(C) \neq 0$). L'indice di Sharpe è dato dalla seguente radice quadrata: $\sqrt{< \mathbf{e}^{\mathbf{T}}, C^{-1}\mathbf{e} >}$, dove $<, >$ indica il consueto prodotto scalare euclideo.

Il punto T in Figura 12, in cui si intersecano l'iperbole e la CML, è il cosiddetto **portafoglio di tangenza**, e corrisponde all'unico portafoglio possibile, che si trova sulla "normale" frontiera efficiente, che prevede di investire soltanto in titoli azionari, quindi investendo 0 nel titolo non rischioso. Il concetto del portafoglio di tangenza T è anche il punto di partenza per introdurre il CAPM.

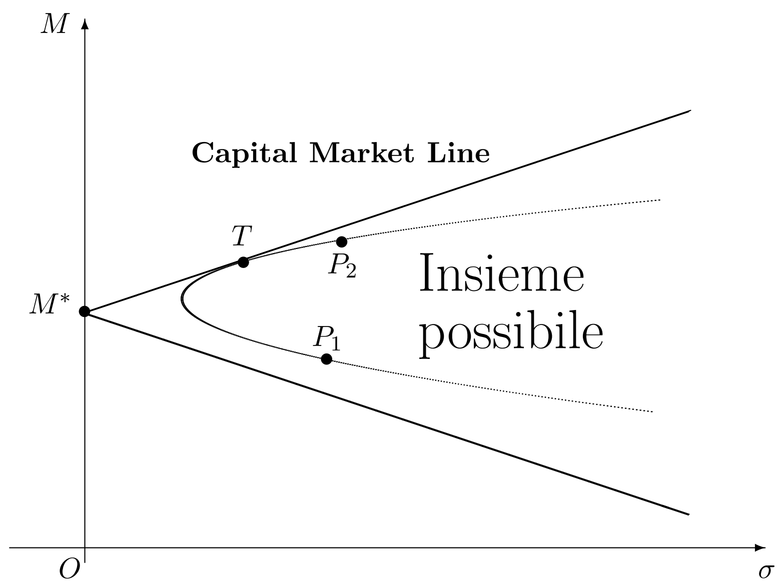

Figura 12. Insieme possibile e Capital Market Line nel piano (σ, M)

Esempio 73. *Consideriamo un modello in cui ci sono* 2 *titoli azionari rischiosi, con indici* 1 *e* 2*, avendo i seguenti volatilità e rendimenti medi:*

$$A_1 = (0.1, 0.05), \qquad A_2 = (0.15, 0.08),$$

e un titolo non rischioso $A_0 = (0, 0.019)$*. Dato l'indice di correlazione* $\rho_{12} = 0,7$*, troviamo l'indice di Sharpe e l'equazione della CML.*

Cominciamo scrivendo la matrice delle varianze/covarianze:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,0105 \\ 0,0105 & 0,0225 \end{pmatrix}.$$

Ora, scriviamo il vettore $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$ *dei rendimenti in eccesso rispetto al rendimento certo, cioè:*

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0,05 - 0,019 \\ \\ 0,08 - 0,019 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,031 \\ 0,061 \end{pmatrix}.$$

L'indice di Sharpe si trova dalla seguente formula:

$$SR = \sqrt{< \mathbf{e^T}, C^{-1}\mathbf{e} >}.$$

Calcolare l'inversa di una matrice 2x2 è abbastanza semplice, ricordando che data

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{pmatrix},$$

la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ \\ -c & a \end{pmatrix},$$

nel nostro caso avremo:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} 0,0225 & -0,0105 \\ \\ -0,0105 & 0,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196,078 & -91,503 \\ \\ -91,503 & 87,145 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo quindi l'indice di Sharpe:

$$SR = \sqrt{\left\langle (0.031, 0.061), \ \left(\begin{pmatrix} 196,078 & -91,503 \\ \\ -91,503 & 87,145 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,031 \\ 0,061 \end{pmatrix} \right)^T \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{< (0.031, 0.061), \ (0.496, 2.479) >} = \sqrt{0,166595} = 0,408.$$

La CML ha dunque equazione:

$$M = 0,019 + 0,408\sigma.$$

6.2 Il Teorema dei 2 fondi

Prima di addentrarci nel CAPM, dobbiamo soffermarci ancora sulla CML e sulla distinzione tra due possibili casi: il caso in cui il titolo non rischioso, indicato dal punto $(0, M^*)$ si possa o non possa vendere allo scoperto.

Se il titolo non rischioso **non è vendibile allo scoperto**, allora la frontiera efficiente è mistilinea, cioè contiene sia il segmento di semiretta tra il titolo non rischioso e il portafoglio di tangenza T, che il ramo di iperbole sopra il punto T, come raffigurato in Figura 13.

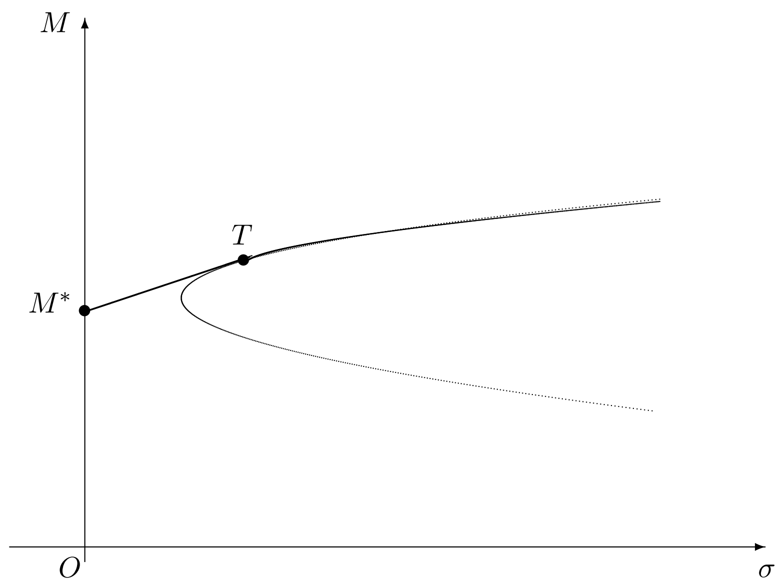

Figura 13. Titolo certo non vendibile allo scoperto: frontiera efficiente

Se invece il titolo non rischioso, collocato sull'asse dei rendimenti, è vendibile allo scoperto, in questo caso la frontiera efficiente è tutta la CML. Esiste un importante risultato, chiamato alternativamente **Teorema di separazione** o **Teorema dei due fondi** che è enunciato in varie forme nei testi[2] e di cui qui accennerò il significato. Prima di tutto, per 'due fondi' si intendono i suddetti punti: quello che corrisponde al titolo certo e il portafoglio T.

Sostanzialmente, se gli operatori hanno tutti aspettative omogenee, cioè le stesse opinioni sull'andamento futuro del mercato, tutti troveranno ottimale il portafoglio di tangenza T. Di conseguenza, la frontiera efficiente è la CML, disegnata nella Figura 14, gli investitori sceglieranno portafogli sulla semiretta, e in particolare i titoli rischiosi saranno suddivisi coerentemente con le percentuali con cui questi titoli figurano nel portafoglio T. Nel caso in cui poi il mercato sia

[2]Per approfondimenti, consiglio di confrontare ad esempio le spiegazioni di [C] (Capitolo 13) e di [S] (Capitolo 9).

in equilibrio[3], il portafoglio di tangenza coinciderà con quello di mercato, e allora nel portafoglio T dovranno esserci tutti i titoli presenti sul mercato, ipotesi forse poco realistica (ma anche l'equilibrio del mercato lo è).

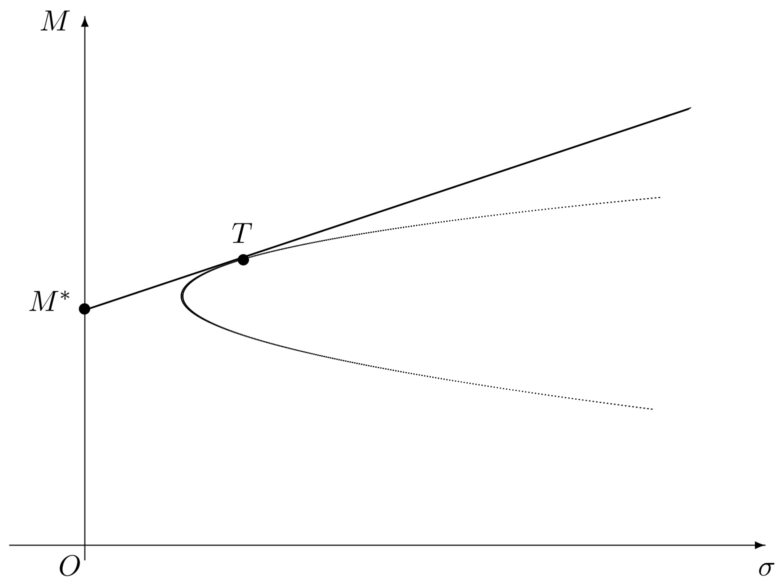

Figura 14. Titolo certo vendibile allo scoperto: frontiera efficiente

6.3 Derivazione ed Interpretazione del CAPM

Il CAPM è un modello di equilibrio di mercato che si basa su alcune importanti ipotesi relative alle preferenze degli investitori, e che precisiamo fin dall'inizio:

- ci sono N titoli rischiosi nel mercato, ed uno soltanto non rischioso[4], già identificato con il punto $(0, M^*)$;
- il titolo privo di rischio si può vendere allo scoperto, in qualsiasi quantità;

[3]Per *equilibrio di mercato*, che è un discorso molto più ampio in termini economici e finanziari, si intende una situazione in cui domande e offerte di tutti i beni si eguagliano e tutti riescono a vendere e comprare le quantità che vogliono ai prezzi desiderati, ovviamente è un'ipotesi molto forte.

[4]Va notato che nel modello si potrebbe anche inserire un ulteriore titolo non rischioso, ma allora basterebbe sceglierne soltanto uno, cioè quello con rendimento maggiore, 'più in alto' sull'asse del Rendimento.

- p_0 è la quota di portafoglio che viene investita nel titolo non rischioso, e se $p_0 < 0$, il titolo certo viene venduto allo scoperto, cioè l'investitore si sta indebitando al tasso di rendimento periodale del titolo non rischioso;
- il vettore dei pesi relativi agli N titoli è $(p_1, \ldots, p_N)$ e la somma di tutti i pesi, p_0 compreso, ammonta a 1;
- tutti gli individui che investono sul mercato seguono un criterio Media-Varianza, sono avversi al rischio, investono sullo stesso orizzonte temporale;
- non ci sono costi di transazione nè imposte e tutti gli individui fanno le stesse valutazioni sui rendimenti attesi e sulle volatilità e sulle correlazioni dei titoli[5];
- il portafoglio di tangenza T precedentemente introdotto coincide con il portafoglio di mercato $\mathcal{M}$, in condizioni di equilibrio.

Inizialmente, definiamo $\mathcal{M} = (\sigma_{\mathcal{M}}, M_{\mathcal{M}})$ il **portafoglio di mercato**, ossia un portafoglio che contiene tutti i titoli presenti sul mercato, suddivisi esattamente in base al valore che ognuno di essi rappresenta rispetto al valore complessivo di tutti i titoli di mercato.

Riscriviamo ora l'equazione della CML, cioè la frontiera efficiente, come semiretta uscente da $(0, M^*)$ e passante per il portafoglio di mercato $\mathcal{M}$:

$$M = \frac{M_{\mathcal{M}} - M^*}{\sigma_{\mathcal{M}}}\sigma + M^*.$$

Sappiamo che, essendo essa la frontiera efficiente, ogni portafoglio efficiente P di rendimento medio M_P e volatilità σ_P dovrà verificare la stessa relazione, per cui:

$$M_P = \frac{M_{\mathcal{M}} - M^*}{\sigma_{\mathcal{M}}}\sigma_P + M^*,$$

o anche, equivalentemente:

$$M_P - M^* = \frac{M_{\mathcal{M}} - M^*}{\sigma_{\mathcal{M}}}\sigma_P.$$

Questa relazione fondamentalmente afferma che il maggior rendimento di un qualsiasi portafoglio efficiente rispetto al rendimento certo corrisponde alla sua volatilità moltiplicata per un fattore che non dipende da P, e che invece è il rapporto tra il 'delta' di rendimento atteso tra il portafoglio di mercato e quello del titolo certo e la volatilità del portafoglio di mercato. Questa quantità, di

[5]Questa ultima ipotesi è solitamente detta delle **aspettative omogenee**.

fatto il coefficiente angolare della CML, prende la denominazione di **prezzo di mercato del rischio**.

Un importante risultato successivo riguarda la covarianza tra il portafoglio di mercato e un qualsiasi altro portafoglio sulla CML. Supponiamo di considerare $P = (\sigma_P, M_P)$, con $\sigma_P > 0$, costruito nel seguente modo:

$$P = \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}\mathcal{M} + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}\right) M^*,$$

e calcoliamone il valore atteso:

$$M_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}M_{\mathcal{M}} + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}\right) M^* = M^* + \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}(M_{\mathcal{M}} - M^*).$$

Chiamando rispettivamente i_P, $i_{\mathcal{M}}$ e i^* i tassi di rendimento del portafoglio P, del portafoglio di mercato $\mathcal{M}$ e del titolo certo, notiamo che vale:

$$i_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}i_{\mathcal{M}} + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}\right) i^*,$$

e dunque, per le proprietà della covarianza, avremo:

$$\operatorname{Cov}(P, \mathcal{M}) = \operatorname{Cov}(i_P, i_{\mathcal{M}}) = \operatorname{Cov}\left(\frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}i_{\mathcal{M}}, i_{\mathcal{M}}\right) = \frac{\sigma_P}{\sigma_{\mathcal{M}}}\sigma_{\mathcal{M}}^2 = \sigma_P\sigma_{\mathcal{M}}.$$

Quest'ultima relazione costituisce il fondamento della formula fondamentale del CAPM. Infatti, sostituendo nell'espressione che mette in relazione i maggiori rendimenti attesi dei portafogli rispetto al rendimento certo, avremo che, dato un qualunque portafoglio P, non necessariamente efficiente:

$$M_P - M^* = \frac{\operatorname{Cov}(P, \mathcal{M})}{\sigma_{\mathcal{M}}^2}(M_{\mathcal{M}} - M^*). \tag{6.3.1}$$

La relazione (6.3.1) è quindi valida su ogni coppia di portafogli, di cui uno sia efficiente, e l'altro sia nell'insieme possibile. Una conseguenza immediata riguarda la **diversificazione del rischio**. Prendendo un qualsiasi titolo A_j, di rendimento medio M_j e volatilità σ_j, possiamo riscrivere la relazione come segue:

$$M_j - M^* = \frac{\operatorname{Cov}(A_j, \mathcal{M})}{\sigma_{\mathcal{M}}^2}(M_{\mathcal{M}} - M^*)$$

$$\Downarrow$$

$$M_j = M^* + \frac{\operatorname{Cov}(A_j, \mathcal{M})}{\sigma_{\mathcal{M}}}\frac{M_{\mathcal{M}} - M^*}{\sigma_{\mathcal{M}}},$$

evidenziando che di fatto, il rendimento di un qualsiasi titolo è uguale alla somma tra il rendimento dell'impiego sicuro più un prodotto di 2 fattori, uno dei quali è il prezzo di mercato del rischio, mentre l'altro contiene l'informazione sulla correlazione tra il titolo e il portafoglio di mercato. Ora, diamo un nome al coefficiente cruciale per la nostra analisi, chiamandolo 'beta'[6]:

$$\beta_j = \frac{\text{Cov}(A_j, \mathcal{M})}{\sigma^2_{\mathcal{M}}}, \tag{6.3.2}$$

e dato un portafoglio composto dalle quote x_j dei titoli A_j, cioè $P = \sum_j x_j A_j$, definiamo anche il β_P di portafoglio:

$$\beta_P = \frac{\text{Cov}(P, \mathcal{M})}{\sigma^2_{\mathcal{M}}} = \sum_{J=1}^{N} x_j \beta_j. \tag{6.3.3}$$

A questo punto riformuliamo le equazioni lineari precedenti con i beta:

$$M_j = M^* + \beta_j(M_{\mathcal{M}} - M^*), \qquad M_P = M^* + \beta_P(M_{\mathcal{M}} - M^*).$$

In definitiva, i beta misurano la tendenza del titolo j-esimo, o del portafoglio P, a muoversi nella direzione del portafoglio di mercato $\mathcal{M}$, il cui beta è uguale a 1. Inoltre, il beta è anche una specie di indice di sensibilità, che indica quanto un titolo, o un portafoglio, è soggetto ai movimenti di mercato. Per cui:

- se $\beta_P = 0$, il portafoglio P è ortogonale al portafoglio di mercato $\mathcal{M}$, quindi i 2 portafogli sono scorrelati;
- se $\beta_P = 1$, i portafogli P ed $\mathcal{M}$ si trovano alla stessa altezza sul piano Rischio - Rendimento, quindi P ha lo stesso rendimento atteso del mercato;
- se $\beta_P > 1$, il rendimento di P risulta maggiore di quello di $\mathcal{M}$, quindi il mercato risulta maggiormente 'movimentato' da questo portafoglio;
- se $\beta_P < 1$, il rendimento di P risulta minore di quello di $\mathcal{M}$, per cui in questo caso il portafoglio P non amplifica i movimenti del mercato, bensì lo attenua;
- se $\beta_P < 0$, il rendimento medio di P è minore di quello del titolo certo.

Per quanto riguarda le volatilità, considerando un titolo A_j interno all'insieme possibile, dalla Figura 15 possiamo evincere alcune informazioni.

[6] Il beta è anche noto (meno) come **indice di Treynor**, dal cognome del suo inventore, un economista finanziario americano.

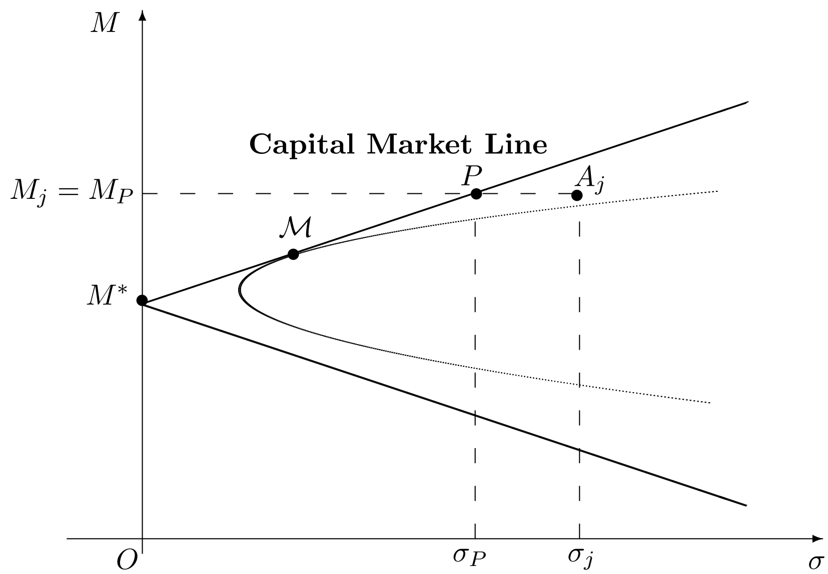

Figura 15. Rischio e rendimento di un titolo A_j nel piano (σ, M)

Il titolo A_j ha rendimento medio più alto sia del portafoglio di mercato $\mathcal{M}$ sia del titolo certo, e quindi il β_j corrispondente sarà maggiore di 1. Inoltre, possiamo decomporre la sua volatilità σ_j in due componenti sommate tra di loro. Come si vede in Figura, sulla CML c'è un punto P che ha lo stesso rendimento medio di A_j ma naturalmente volatilità $\sigma_P < \sigma_j$. Quindi possiamo scrivere semplicemente

$$\sigma_j = \sigma_P + (\sigma_j - \sigma_P),$$

cioè come somma di 2 componenti, e cioè:

- la prima, σ_P, che corrisponde alla volatilità del portafoglio efficiente avente lo stesso rendimento medio di A_j, definita **rischio sistematico**;

- la seconda, $\sigma_j - \sigma_P$, che invece è la differenza tra le due volatilità, che è detta componente di **rischio eliminabile**.

L'eliminabilità del rischio è data dalla possibile diversificazione degli investimenti, cioè da una strategia che aumenti la numerosità dei titoli in modo da attenuare il rischio complessivo. Si vede facilmente che il rischio sistematico di un titolo misura il contributo marginale di quel titolo al rischio complessivo di mercato.

Un ultimo aspetto, di grande rilevanza, che ci fornisce il CAPM è la sua formulazione tramite una regressione. Sempre considerando un titolo A_j, e trasformando la relazione fondamentale in una espressione affine (cioè lineare ma traslata) del tipo:

$$M_j - M^* = \alpha + \beta(M_{\mathcal{M}} - M^*) + \epsilon,$$

otteniamo una tipica retta di regressione lineare, in cui α e β sono costanti ed ϵ rappresenta un termine di errore statistico. Imponendo la media dell'errore uguale a 0, otteniamo

$$\mathbb{E}[\epsilon] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = M_j - M^* - \beta(M_{\mathcal{M}} - M^*).$$

Nei modelli di regressione lineare, oltre ad annullare la media dell'errore, va minimizzata la varianza dell'errore, quindi la quantità

$$\sigma^2(\epsilon) = \sigma^2 + \beta^2\sigma^2_{\mathcal{M}} - 2\mathrm{Cov}(M, M_{\mathcal{M}}),$$

rispetto a β, minimizzazione che ha un'unica soluzione, e cioè il β che già ben conosciamo, e che prende questa lettera anche nelle rette di regressione:

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(M, M_{\mathcal{M}})}{\sigma^2_{\mathcal{M}}}.$$

Se si volesse validare empiricamente il CAPM tramite un test statistico, la cosa sarebbe evidentemente possibile, con l'unico inconveniente di dover scegliere correttamente il portafoglio di mercato da cui partire (e i relativi rendimento e volatilità).

6.4 Esercizi Proposti

1. Dato il titolo non rischioso $(0, 50)$ **e il titolo rischioso** $(5, 70)$**, determinare la Capital Allocation Line e l'indice di Sharpe SR.**

[$M(\sigma) = 4\sigma + 50; \quad SR = 4$]

2. Dato il titolo non rischioso $(0, 25)$ **e il titolo rischioso** $(10, 40)$**, determinare il valore di** σ^* **tale che il punto** $P^* = (\sigma^*, 100)$ **appartiene alla Capital Allocation Line.** [$\sigma^* = 50$]

3. Consideriamo un modello in cui ci sono i 2 **titoli azionari rischiosi che hanno i seguenti volatilità e rendimenti medi:**

$$A_1 = (0.3, 0.04), \qquad\qquad A_2 = (0.4, 0.1),$$

e un titolo non rischioso $A_0 = (0, 0.011)$. Dato l'indice di correlazione $\rho_{12} = 0,41$, calcolare l'indice di Sharpe e determinare l'equazione della CML. $[SR = 0,224; \quad CML : M = 0,011 + 0,224\sigma]$

4. Dato il titolo non rischioso $(0, 90)$ e il portafoglio di mercato $(10, 120)$, determinare il rendimento minimo M_{min} di un titolo A affinchè il suo β_A sia almeno uguale a $0,6$.

$[M_{min} = 108]$

5. Dato un portafoglio P con i titoli A_1 e A_2, con le rispettive quote $1/3$ e $2/3$, il titolo non rischioso $(0, 30)$ e il portafoglio di mercato $\mathcal{M} = (20, 50)$, calcolare il rendimento di portafoglio M_P sapendo che le covarianze dei titoli A_j con il portafoglio di mercato sono:

$$\mathbf{Cov}(A_1, \mathcal{M}) = 300, \qquad \mathbf{Cov}(A_2, \mathcal{M}) = -200.$$

$[M_P = 28,333]$

6. Dato un portafoglio P con i titoli A_1 e A_2, con le rispettive quote p e $1 - p$, il titolo non rischioso $(0, 10)$ e il portafoglio di mercato $\mathcal{M} = (20, 45)$, calcolare la quota p sapendo che il rendimento del portafoglio è $M_P = 37$ e che le covarianze dei titoli A_j con il portafoglio di mercato sono:

$$\mathbf{Cov}(A_1, \mathcal{M}) = 1000, \qquad \mathbf{Cov}(A_2, \mathcal{M}) = -700.$$

$[p = 0,593]$

Capitolo 7

Single Index Model (SIM)

L'ultimo modello che analizziamo è una delle varie evoluzioni della Teoria del Portafoglio, e si chiama **Single Index Model, SIM** o **Modello mono-indice**. Anche questo, come gli altri, sarà presentato sinteticamente. Per approfondimenti ulteriori, consiglio il Capitolo 7 di [EGBG] oppure il Capitolo 13, paragrafo 5 di [C].

Partiamo da una elementare osservazione: guardando gli andamenti delle azioni di Borsa, di una qualsiasi Borsa, anche di asset tecnologici, o commodities, e via dicendo, tipicamente c'è un indice che riassume l'andamento giornaliero. Normalmente, questo indice è fortemente correlato all'andamento delle singole azioni: quando il mercato sale, la maggior parte delle azioni aumenta di valore e quando il mercato scende, la maggior parte delle azioni diminuisce di valore. Questo fatto molto evidente, che possiamo verificare praticamente ogni giorno, suggerisce una relazione, che supporremo essere lineare, tra l'indice di mercato e i singoli valori degli asset, su cui si basa il SIM.

7.1 Ipotesi alla base del SIM

Elenchiamo qui di seguito le ipotesi necessarie per il SIM, includendo anche la notazione scelta. Chiamiamo M_i il rendimento dell'i-esimo asset di mercato, per $i = 1, \dots, N$, ed $M_{\mathcal{M}}$ il rendimento dell'indice di mercato. Le suddette variabili sono aleatorie.

- Sussiste una relazione che intercorre tra il rendimento dell'i-esimo titolo e il rendimento di mercato:

  $$M_i = \alpha_i + \beta_i M_{\mathcal{M}} + e_i, \tag{7.1.1}$$

  dove:

1. α_i è una costante che indica la componente del rendimento dell'i-esimo titolo indipendente dalle performance del mercato;
2. β_i è una costante che misura la sensibilità del rendimento dell'i-esimo titolo al rendimento del mercato[1];
3. e_i è una v.a. che indica un termine additivo di errore, su cui possiamo fare delle ipotesi 'comode' come che abbia media nulla e che sia indipendente dal rendimento di mercato.

- I termini di errore e_i verificano le seguenti proprietà:

$$\text{Cov}(e_i, e_j) = 0, \qquad \forall i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, N.$$

$$\mathbb{E}[e_i] = 0.$$

$$\text{Cov}(e_i, M_{\mathcal{M}}) = 0.$$

- Detti $\mathbb{E}[M_i]$ e $\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]$ i valori attesi dei titoli, vale la relazione:

$$\mathbb{E}[M_i] = \alpha_i + \beta_i \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}].$$

- Dette σ_i^2 la varianza del rendimento dell'i-esimo titolo, $\sigma_{\mathcal{M}}^2$ la varianza del rendimento di mercato, e $\sigma_{e_i}^2$ la varianza dell'i-esimo errore, vale la relazione:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{\mathcal{M}}^2 + \sigma_{e_i}^2.$$

- Detta σ_{ij} la covarianza tra i titoli i-esimo e j-esimo, si può dimostrare[2] l'identità:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_{\mathcal{M}}^2.$$

Illustriamo alcune di queste relazioni con un semplice Esempio.

Esempio 74. *Supponiamo di avere* 2 *diversi titoli:* A *e* B*, e di fotografare sul mercato a un certo istante i loro rispettivi parametri* α_A *ed* α_B*, gli errori* e_A *ed* e_B *e il valore del rendimento di mercato. Usando il SIM, calcoliamo i rispettivi* β_A *e* β_B*. I dati sono elencati nella seguente tabella:*

	α_i	e_i	M_i
Titolo A	$4,15$	$0,1$	10
Titolo B	$8,55$	$0,2$	14

[1] In altre parole, possiamo anche vederla come derivata parziale del rendimento del titolo i-esimo rispetto al rendimento di mercato: $\beta_i = \dfrac{\partial M_i}{\partial M_{\mathcal{M}}}$.

[2] Vedi [EGBG] alle pagine 152 e 153 per la derivazione completa.

Il rendimento di mercato è $M_{\mathcal{M}} = 3$. Calcoliamo i rispettivi β_A e β_B usando la relazione (7.1.1):

$$M_A = \alpha_A + \beta_A M_{\mathcal{M}} + e_A \iff \beta_A = \frac{M_A - \alpha_A - e_A}{M_{\mathcal{M}}} = \frac{10 - 4,15 - 0,1}{3} = 1,916.$$

$$M_B = \alpha_B + \beta_B M_{\mathcal{M}} + e_B \iff \beta_B = \frac{M_B - \alpha_B - e_B}{M_{\mathcal{M}}} = \frac{14 - 8,55 - 0,2}{3} = 1,75.$$

Di conseguenza, il titolo A è maggiormente sensibile all'aumento dell'indice di mercato rispetto al titolo B, che peraltro ha rendimento maggiore.

7.2 α e β di un portafoglio

Estendiamo la discussione precedente andando ora a considerare il SIM in uno scenario in cui trattiamo un portafoglio P costituito da N titoli. Il titolo i-esimo è in percentuale p_i, e quindi, detti $\mathbb{E}[M_P]$ e $\mathbb{E}[M_i]$ i rendimenti attesi del portafoglio e dell'i-esimo titolo, abbiamo la relazione:

$$\mathbb{E}[M_P] = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}[M_i]. \tag{7.2.1}$$

Considerando poi la relazione fondamentale del SIM, presa con i valori attesi, sostituendo otteniamo:

$$\mathbb{E}[M_P] = \sum_{i=1}^{N} p_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} p_i \beta_i \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}],$$

mentre, poichè la varianza di portafoglio è data da

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \sigma_{ij},$$

dove la seconda sommatoria nel termine con le covarianze è presa su tutti i $j \neq i$, sostituendo le espressioni trovate in precedenza si ha:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \beta_i^2 \sigma_{\mathcal{M}}^2 + \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_{e_i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \beta_i \beta_j \sigma_{\mathcal{M}}^2. \tag{7.2.2}$$

La stima dei parametri del SIM può risultare molto complessa: le equazioni (7.2.1) e (7.2.2) richiedono le stime degli α_i, dei β_i, dei σ_{ei}^2, e naturalmente di rendimento atteso e varianza del mercato, cioè $\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]$ e $\sigma^2_{\mathcal{M}}$, quindi praticamente $3N+2$ stime diverse.

Tornando al nostro portafoglio P, anche esso avrà un suo α, detto α_P, e un suo β, detto β_P, ed entrambi sono combinazioni lineari degli α_i e dei β_i dei singoli titoli, con i pesi che al solito sono dati dalle quote dei singoli titoli in portafoglio, i.e.

$$\alpha_P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i, \qquad\qquad \beta_P = \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i. \tag{7.2.3}$$

Dalla (7.2.3), possiamo riscrivere la (7.2.1) come segue:

$$\mathbb{E}[M_P] = \alpha_P + \beta_P \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}].$$

Anche la varianza di P può essere riformulata. Infatti, le due sommatorie che contengono $\sigma^2_{\mathcal{M}}$ possono essere unite nell'unica espressione

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_{e_i}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_i p_j \beta_i \beta_j \sigma^2_{\mathcal{M}},$$

dove i può anche essere uguale a j, da cui

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_{e_i}^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \beta_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} p_j \beta_j\right)\sigma^2_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_{e_i}^2 + \beta_P^2 \sigma^2_{\mathcal{M}}.$$

Se poi ora supponiamo di costruire il nostro portafoglio prendendo la stessa quota per ciascuna azione, e quindi $p_i = \dfrac{1}{N}$ per ogni titolo i, la precedente espressione diventerà

$$\sigma_P^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_{e_i}^2}{N^2} + \beta_P^2 \sigma^2_{\mathcal{M}},$$

da cui si può facilmente notare che all'aumentare del numero dei titoli, il primo addendo, che corrisponde al rischio specifico, diventa sempre più piccolo, tendendo addirittura a 0 se i titoli in portafoglio fossero infiniti. Invece, il rischio non eliminato, sarebbe il secondo addendo, in termini di volatilità uguale a

$$\sqrt{\beta_P^2 \sigma^2_{\mathcal{M}}} = \sigma_{\mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \beta_i\right),$$

per cui il contributo marginale del titolo i-esimo sarebbe comunque β_i.

Come si possono stimare i β_i? Un approccio standard e molto adottato è quello che deriva dai dati storici, cioè sulla base di una serie storica di dati sui β_i, che può fornire informazioni sui β_i attesi. Sotto alcune condizioni di mercato (o geopolitiche), si possono usare i dati storici ma anche apportare alcune correzioni. In particolare, possiamo usare una ben nota tecnica statistico/econometrica detta *regressione lineare*.

In sostanza, partendo da una 'nuvola' di punti nel piano, cioè di dati, la retta di regressione lineare è quella retta che minimizza la soma degli scarti quadratici, cioè le distanze al quadrato dalla retta ai punti della nuvola.

Più precisamente, supponiamo di avere una successione di rendimenti M_{it} di un certo titolo i-esimo su uno scadenzario con indice t, ad esempio $t = 1, 2, \ldots, N$ (anni oppure mesi), e di conoscere anche i rendimenti del mercato $M_{\mathcal{M}t}$ in tutti questi periodi. Avendo a disposizione questi dati, i coefficienti β_i saranno dati da questa espressione:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{N} \{(M_{it} - \mathbb{E}[M_{it}])\,(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}t}])\}}{\sum_{t=1}^{N} (M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}t}])^2}. \tag{7.2.4}$$

Una volta trovati i β_i, la stima degli α_i si può realizzare usando i valori attesi sull'equazione di regressione:

$$\alpha_i = \mathbb{E}[M_{it}] - \beta_i \cdot \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}t}]. \tag{7.2.5}$$

La retta di regressione viene tracciata su un piano in cui le ascisse corrispondono ai valori del rendimento di mercato e le ordinate ai valori del rendimento del titolo. In questa maniera, i β dei titoli rappresentano l'effetto che il mercato ha su ogni titolo. Il valore di α è forse un pò meno importante ai fini dell'analisi, ma è comunque necessario per disegnare la retta sul piano.

Il prossimo Esempio numerico, in cui determineremo la retta di regressione, è liberamente tratto dalla Tabella 7.1 di [EGBG] (pag. 153).

Esempio 75. *Supponiamo che un titolo, il cui rendimento è descritto da M_t, con t che rappresenta il numero di mesi, presenti i seguenti rendimenti, durante 6 mesi consecutivi, e mettiamolo a confronto mese per mese con il relativo rendimento di mercato, espresso dalla variabile $M_{\mathcal{M}t}$:*

Mese	$M_{\mathcal{M}t}$ *(mercato)*	M_t *(titolo)*
1	4	10
2	2	3
3	8	15
4	6	9
5	0	3
6	5	7

In base a questi dati, possiamo calcolare prima il rendimento medio di mercato, cioè $\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}] = 25/6$, *e successivamente il denominatore della (7.2.4):*

$$\sum_{t=1}^{6}(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}t}])^2 = \left(4 - \frac{25}{6}\right)^2 + \left(2 - \frac{25}{6}\right)^2 + \left(8 - \frac{25}{6}\right)^2 + \\ + \left(6 - \frac{25}{6}\right)^2 + \left(0 - \frac{25}{6}\right)^2 + \left(5 - \frac{25}{6}\right)^2 = \frac{1470}{36} = \frac{245}{6}.$$

Invece il rendimento medio del titolo è $\mathbb{E}[M] = 47/6$, *con cui successivamente calcoliamo il numeratore della (7.2.4):*

$$\sum_{t=1}^{6}(M_t - \mathbb{E}[M])(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]) = \left(10 - \frac{47}{6}\right)\left(4 - \frac{25}{6}\right) + \left(3 - \frac{47}{6}\right)\left(2 - \frac{25}{6}\right) + \\ + \left(15 - \frac{47}{6}\right)\left(8 - \frac{25}{6}\right) + \left(9 - \frac{47}{6}\right)\left(6 - \frac{25}{6}\right) + \left(3 - \frac{47}{6}\right)\left(0 - \frac{25}{6}\right) + \\ + \left(7 - \frac{47}{6}\right)\left(5 - \frac{25}{6}\right) = \frac{2130}{36} = \frac{355}{6} \implies \beta = \frac{355/6}{245/6} = \frac{71}{49} = 1,448.$$

Invece il coefficiente α *risulterà, dalla (7.2.5):*

$$\alpha = \mathbb{E}[M] - \beta \cdot \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}] = \frac{47}{6} - \frac{71}{49}\frac{25}{6} = 1,7959.$$

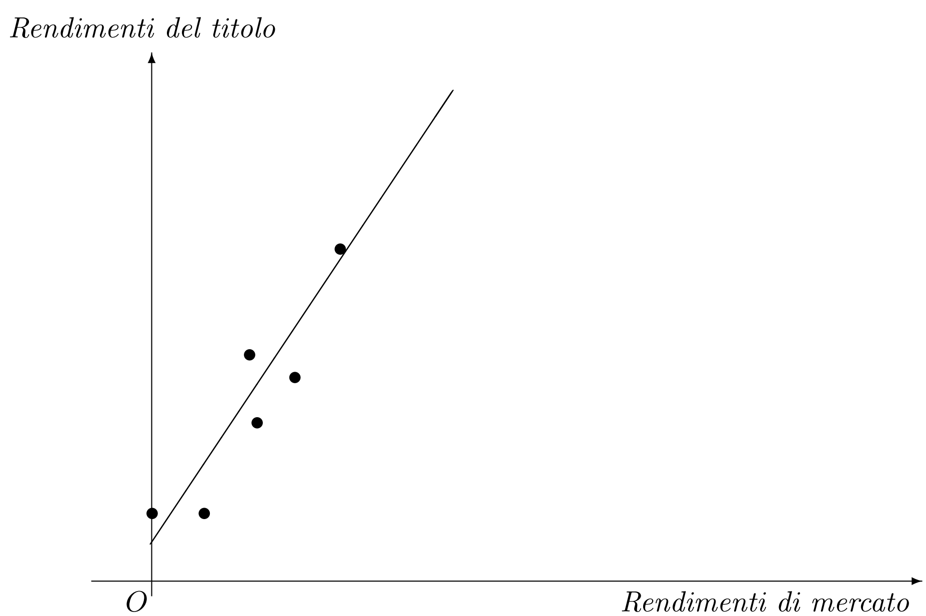

Figura 16. *Retta di regressione con* $\alpha = 1,7959$, $\beta = 1,448$

Quindi abbiamo ricavato la retta di regressione, con coefficiente angolare β e intercetta α, che illustra chiaramente l'effetto positivo del rendimento del mercato su quello del titolo, come si vede dalla Figura 16.

Nel prossimo Esempio, lavoreremo su un portafoglio costruito su dati reali azionari.

Esempio 76. *Supponiamo questa volta di prendere in esame e confrontare tra loro* 2 *titoli azionari. Avendo i dati del mercato insieme a quelli dei singoli titoli, possiamo ricavare il coefficiente di correlazione, o la covarianza, tra i titoli, da quella del mercato.*

Questa volta, consideriamo 2 *titoli i cui valori storici possono essere trovati in rete agevolmente, ad esempio quelli della Fiat Chrysler Automobiles (FCA) e del Monte dei Paschi di Siena (MPS) nei mesi da Aprile a Settembre* 2020*, rilevando il valore all'ultimo giorno del mese. L'indice di riferimento è quello del FTSE MIB (Borsa Italiana). Raccogliamo i dati, cioè i valori dei singoli asset nella seguente tabella:*

Mese	*FTSE MIB*	*FCA*	*MPS*
Aprile	$17690,49$	$8,61$	$1,11$
Maggio	$18197,56$	$8,84$	$1,32$
Giugno	$19375,52$	$10,24$	$1,58$
Luglio	$19091,93$	$10,15$	$1,53$
Agosto	$19633,69$	$11,03$	$1,43$
Settembre	$19015,27$	$12,22$	$1,39$

I dati presenti nella precedente tabella sono i prezzi delle singole azioni, ma in realtà a noi servono di più i rendimenti, quindi costruiamo un'altra tabella, con i rendimenti in percentuale dei singoli titoli rispetto al valore dei titoli 5 *anni prima (il* 16 *Ottobre* 2015*), che in particolare era* $10,65$ *per FCA,* $164,1$ *per MPS e* $22337,66$ *per l'FTSE MIB*[3]*. La tabella dei rendimenti*[4]*, sulla quale baseremo il calcolo dei β, è quella che segue.*

[3]Ovviamente la scelta di un valore di riferimento, 'fotografando' il mercato 5 anni prima, è del tutto arbitrario e in questo caso è puramente esemplificativo.

[4]Possiamo anche intendere i numeri della tabella in percentuale, ad esempio $-0,208$ significa $-20,8\%$ rispetto al valore registrato il 16 Ottobre 2015.

Mese	*FTSE MIB*	*FCA*	*MPS*
Aprile	$-0,208$	$-0,191$	$-0,993$
Maggio	$-0,185$	$-0,169$	$-0,991$
Giugno	$-0,132$	$-0,038$	$-0,99$
Luglio	$-0,145$	$-0,046$	$-0,99$
Agosto	$-0,121$	$0,035$	$-0,991$
Settembre	$-0,148$	$0,147$	$-0,991$

Ora, iniziamo calcolando il rendimento medio di mercato (cioè dell'indice FTSE MIB), e i due rendimenti medi degli altri titoli:

$$\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}] = \frac{-0,208 - 0,185 - 0,132 - 0,145 - 0,121 - 0,148}{6} = -0,156.$$

$$\mathbb{E}[FCA] = \frac{-0,191 - 0,169 - 0,038 - 0,046 + 0,035 + 0,147}{6} = -0,043.$$

$$\mathbb{E}[MPS] = \frac{-0,993 - 0,991 - 0,99 - 0,99 - 0,991 - 0,991}{6} = -0,991.$$

Per ricavare i due β, al solito calcoliamo denominatore e numeratore della (7.2.4):

$$\sum_{t=1}^{6}(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}t}])^2 = (-0,208 + 0,156)^2 + (-0,185 + 0,156)^2 +$$
$$+ (-0,132 + 0,156)^2 + (-0,145 + 0,156)^2 + (-0,121 + 0,156)^2 +$$
$$+ (-0,148 + 0,156)^2 = 0,005.$$

E ora, i due rispettivi numeratori, relativi al titolo FCA, che chiamiamo FCA_t e al titolo MPS, che chiamiamo MPS_t:

$$\sum_{t=1}^{6}(FCA_t - \mathbb{E}[FCA])(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]) = (-0,191 + 0,043)(-0,208 + 0,156) +$$
$$+ (-0,169 + 0,043)(-0,185 + 0,156) + (-0,038 + 0,043)(-0,132 + 0,156) +$$
$$+ (-0,046 + 0,043)(-0,145 + 0,156) + (0,035 + 0,043)(-0,121 + 0,156) +$$
$$+ (0,147 + 0,043)(-0,148 + 0,156) = 0,015.$$

$$\sum_{t=1}^{6}(MPS_t - \mathbb{E}[MPS])(M_{\mathcal{M}t} - \mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]) = (-0,993 + 0,991)(-0,208 + 0,156) +$$
$$+ (-0,991 + 0,991)(-0,185 + 0,156) + (-0,99 + 0,991)(-0,132 + 0,156) +$$

$$+(-0,99+0,991)(-0,145+0,156)+(-0,991+0,991)(-0,121+0,156)+$$
$$+(-0,991+0,991)(-0,148+0,156)=0,0002.$$

Quest'ultima approssimazione è alla quarta cifra per evitare che poi il rapporto faccia 0, ma sarà comunque molto molto vicino.

ora possiamo finalmente ricavare i β del titolo FCA e del titolo MPS:

$$\beta_{FCA}=\frac{0,015}{0,005}=3.$$

$$\beta_{MPS}=\frac{0,0002}{0,005}=0,04.$$

Questi valori indicano, anche in questo caso, che il mercato ha un effetto positivo su entrambi i titoli, seppur con diverse intensità. Invece i relativi α si ricavano sempre applicando (7.2.5):

$$\alpha_{FCA}=\mathbb{E}[FCA]-\beta_{FCA}\cdot\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]=-0,043-3\cdot(-0,156)=0,425.$$

$$\alpha_{MPS}=\mathbb{E}[MPS]-\beta_{MPS}\cdot\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]=(-0,991)-0,04\cdot(-0,156)=-0,984.$$

Nelle due successive Figure, tracciamo le due rette di regressione, che illustrano come l'effetto del mercato sia più forte nel caso di FCA.

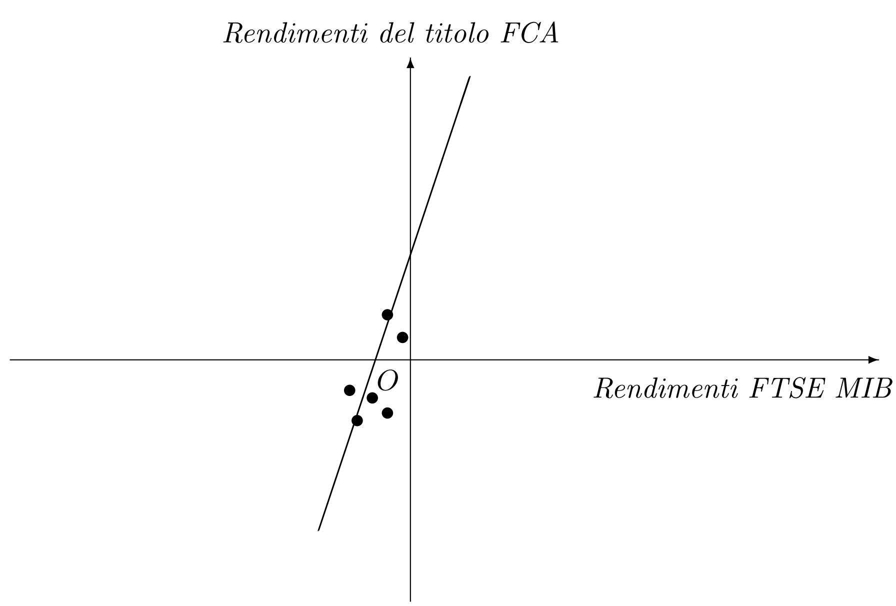

Figura 17. *Retta di regressione per FCA con $\alpha_{FCA}=0,425$, $\beta_{FCA}=3$*

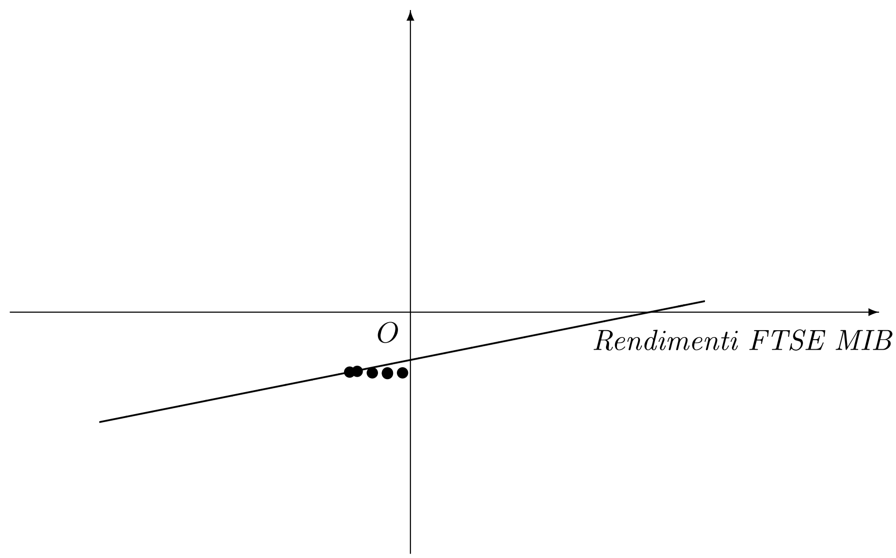

Figura 18. *Retta di regressione per MPS con* $\alpha_{MPS} = -0,984$, $\beta_{MPS} = 0,04$

7.3 Esercizi proposti

1. Dati i titoli rischiosi i cui parametri sono elencati nella seguente tabella, calcolare i rispettivi β sapendo che il rendimento di mercato è $M_{\mathcal{M}} = 80$.

	α_i	e_i	M_i
Titolo A	$7,25$	$0,3$	30
Titolo B	$10,75$	$0,4$	55

$[\beta_A = 0,28; \qquad \beta_B = 0,548]$

2. Dato il titolo rischioso A tale che $\mathbb{E}[M_A] = 45$, $\alpha_A = 20$, **calcolare il valore atteso del portafoglio di mercato $\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}]$ tale che $\beta_A = 0,5$.**

$[\mathbb{E}[M_{\mathcal{M}}] = 40]$

3. Dato il titolo rischioso A i cui rendimenti sono elencati nella seguente tabella su un profilo temporale di 3 mesi, insieme al rendimento del mercato, calcolare i suoi parametri α e β.

Mese	$M_{\mathcal{M}t}$ **(mercato)**	M_t **(titolo)**
1	10	8
2	12	4
3	26	12

$[\alpha = 2,112; \qquad \beta = 0,368]$

4. Dati i titoli rischiosi A e B i cui parametri sono elencati nella seguente tabella, e supponendo che vengano collocati in un portafoglio con quote $0,2$ del titolo A e $0,8$ del titolo B, calcolare il β_P di portafoglio, sapendo che il rendimento di mercato è $M_{\mathcal{M}} = 200$.

	α_i	e_i	M_i
Titolo A	15	0,1	70
Titolo B	25	0,2	65

$[\beta_P = 0,214]$

5. Dati i titoli rischiosi A e B i cui parametri sono elencati nella seguente tabella, e supponendo che vengano collocati in un portafoglio con quote p del titolo A e $1-p$ del titolo B, calcolare il valore di p affinchè il beta di portafoglio sia $\beta_P = 0,15$ sapendo che il rendimento di mercato è $M_{\mathcal{M}} = 400$.

	α_i	e_i	M_i
Titolo A	5	0,5	40
Titolo B	12	0,3	75

$[p = 0,095]$

6. Dato il titolo rischioso M i cui rendimenti sono elencati nella seguente tabella su un profilo temporale di 5 mesi, insieme al rendimento del mercato, calcolare i suoi parametri α e β e la varianza del titolo σ^2.

Mese	$M_{\mathcal{M}t}$ **(mercato)**	M_t **(titolo)**
1	40	10
2	50	5
3	60	-3
4	55	-7
5	35	10

$$[\alpha = 34,776; \qquad \beta = -0,662; \qquad \sigma_M^2 = 47,6]$$

Bibliografia Consigliata

[B] Paolo Baldi, *Calcolo delle Probabilità e Statistica*, Milano, McGraw-Hill Libri Italia, 1998.

[C] Fabrizio Cacciafesta, *Lezioni di Matematica Finanziaria classica e moderna*, Torino, Giappichelli, 2001.

[CDFM] Gilberto Castellani, Massimo De Felice, Franco Moriconi, *Manuale di Finanza* 2, Bologna, Il Mulino, 2005.

[EGBG] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann, *Teorie del portafoglio e analisi degli investimenti*, Santarcangelo di Romagna (RN), Apogeo Education - Maggioli editore, 2017.

[L] David G. Luenberger, *Finanza e investimenti*, Santarcangelo di Romagna (RN), Apogeo Education - Maggioli editore, 2011.

[M] Franco Moriconi, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Il Mulino, 1994.

[O] *Opzione (finanza)*, Wikipedia, $http://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_(finanza)$.

[P] Arsen Palestini, sito docente UNIROMA1, dispense di Matematica Finanziaria, $https://www.memotef.uniroma1.it/node/6239$.

[PR] Andrea Pascucci, Wolfgang Runggaldier, *Finanza Matematica*, Milano, Springer Italia, 2009.

[R] Daniele Ritelli, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Società Editrice Esculapio, 2013.

[S] Giacomo Scandolo, *Matematica Finanziaria*, Padova, Amon Edizioni, 2013.

[VNM] John von Neumann, Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1944.